УНИВЕРЗИТЕТ ОДБРАНЕ У БЕОГРАДУ
ВОЈНА АКАДЕМИЈА

Момир М. Дракулић

МОДЕЛИРАЊЕ И ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ВАЛИДАЦИЈА КОНТАКТНИХ СИЛА ТОКОМ КРЕТАЊА БРЗОХОДНОГ ГУСЕНИЧНОГ ВОЗИЛА ПО ДЕФОРМАБИЛНОЈ ПОДЛОЗИ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Београд, 2026. године

УНИВЕРЗИТЕТ ОДБРАНЕ У БЕОГРАДУ
ВОЈНА АКАДЕМИЈА

Момир М. Дракулић

МОДЕЛИРАЊЕ И ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ВАЛИДАЦИЈА КОНТАКТНИХ СИЛА ТОКОМ КРЕТАЊА БРЗОХОДНОГ ГУСЕНИЧНОГ ВОЗИЛА ПО ДЕФОРМАБИЛНОЈ ПОДЛОЗИ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Београд, 2026. године

Ментор: пуковник, редовни професор
др Бранимир Б. Крстић, дипл. инж.

Чланови комисије: генерал-мајор, доцент
др Славко Ракић, дипл. инж.

пуковник, редовни професор
др Сретен Перић, дипл. инж.

редовни професор
др Јованка Лукић, дипл. инж.

редовни професор
др Данијела Милорадовић, дипл. инж.

пуковник, редовни професор
др Бранимир Б. Крстић, дипл. инж.

Датум одбране: ---

ПРЕДГОВОР

Израда докторске дисертације представља завршетак вишегодишњег рада, учења и истраживања у области која ме интересује још од првих кадетских дана. Све је почело током предавања која је држао професор др Славко Муждека, коме сам неизмерно захвалан. Иако, нажалост, више није међу нама, желим да му и овом приликом изразим посебну захвалност и поштовање, јер сматрам да је управо он у значајној мери усмерио моје касније професионално и научно интересовање.

Посебну захвалност дугујем ментору, декану Војне академије, професору др Бранимиру Крстићу, који је уложио велики труд и време како би ова дисертација добила свој коначан облик. Током периода када је био начелник Катедре, пружио ми је поверење и подршку, захваљујући којима сам имао добре услове за рад и јасно постављен правац професионалног и научног развоја. Његови савети, сугестије и захтеван, али конструктиван приступ раду значајно су допринели квалитету овог истраживања.

Велику захвалност дугујем и својим колегама, потпуковнику Александру Ђурићу и заставнику прве класе Дејану Белошевићу, који су својим знањем, стручношћу и ангажовањем значајно допринели реализацији експерименталног истраживања.

Захваљујем се и свим осталим колегама са којима сам током претходних година имао прилику да сарађујем. Многи од њих су ми помогли да направим прве кораке у научноистраживачком раду, несебично делећи своје знање и искуство, како у области којом се бавим, тако и у припреми и писању научних радова. Њихови савети и подршка важан су део мог професионалног развоја.

Захваљујем се и уваженим члановима комисије, који су својим знањем и сугестијама допринели квалитету докторске дисертације.

Највећу захвалност дугујем својој породици – мајци Данијели, брату Вукашину и сестри Милици. Њихова подршка била ми је значајна током читавог периода студирања и рада на изради дисертације.

На крају, посебну захвалност дугујем својој супрузи Светлани. Само она у потпуности зна колико ово путовање није било једноставно и колико је времена, рада и одрицања захтевало. Почетак нашег заједничког живота готово се поклопио са почетком мојих мастер академских студија, па је путовање до завршетка докторских академских студија уз њу било много лакше. Током тог периода, велики део породичних и свакодневних обавеза често је

био на њој, како бих ја имао време и могућност да се посветим студирању, истраживању и писању дисертације.

Због стрпљења, разумевања и свега чега се одрекла како бих ја могао да завршим оно што сам започео, али и сати читања, савета и корекција, дугујем јој посебну захвалност.

Данас, иза нас је троје деце и једна завршена докторска дисертација.

Такође, захваљујем се и свим осталим члановима породице и пријатељима који су ми све ове године давали ветар у леђа, олакшавали тешке дане и храбрили да истрајем до жељеног циља.

Ова дисертација је формално резултат мог рада, али је настала уз знање, подршку и помоћ многих људи, и свакоме од њих припада део заслуга.

Момир Дракулић
у Београду, 2026. године

МОДЕЛИРАЊЕ И ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ВАЛИДАЦИЈА КОНТАКТНИХ СИЛА ТОКОМ КРЕТАЊА БРЗОХОДНОГ ГУСЕНИЧНОГ ВОЗИЛА ПО ДЕФОРМАБИЛНОЈ ПОДЛОЗИ

РЕЗИМЕ

У докторској дисертацији представљен је развој и експериментална валидација симулационог модела интеракције гусеница и деформабилне подлоге, као и анализа динамике кретања и управљивости брзоходног гусеничног возила у току заокрета. Посебна пажња посвећена је утицају карактеристика подлоге на бочно клизање, стабилност заокрета, контактне силе и трајекторију кретања, при чему је истраживање спроведено на примеру борбеног возила пешадије БВП М80А.

Полазећи од прегледа постојећих терамеханичких модела, указано је на ограничења како рачунарски захтевних напредних приступа, тако и поједностављених кинематичких модела у којима утицај деформабилне подлоге није обухваћен. Као компромисно решење развијен је математички модел заснован на теорији смицајног напона, који омогућава веродостојан прорачун контактних сила уз прихватљиво време извршавања и ниске захтеве у погледу хардверских ресурса. На основу развијеног математичког модела формиран је симулациони модел у MATLAB/Simulink окружењу и спроведена су експериментална истраживања на наведеном возилу, чији су резултати коришћени за валидацију симулационог модела.

Резултати показују добро поклапање симулационих и експерименталних података, при чему просечна релативна грешка у прорачуну уздужних контактних сила током заокрета не прелази 8%. Симулацијама кретања возила по различитим деформабилним подлогама анализиран је утицај карактеристика терена на бочно клизање, радијус заокрета и расподелу контактних сила, уз уочен губитак стабилности на подлогама мање носивости. Додатно, анализа осетљивости симулационог модела на промену конструкционих параметара возила и примена модела у тестирању алгоритама аутоматског управљања показале су да развијени симулациони модел представља користан алат за анализу динамике возила, процену управљивости и примену у процесима модернизације и развоја напредних система управљања.

Кључне речи: брзоходно гусенично возило, интеракција гусенице и подлоге, деформабилна подлога, бочно клизање, симулациони модел.

Научно поље/научна област: Техничко-технолошке науке/машинско инжењерство

Ужа научна област: Моторна возила и мотори

MODELING AND EXPERIMENTAL VALIDATION OF CONTACT FORCES DURING THE MOTION OF A HIGH-SPEED TRACKED VEHICLE ON DEFORMABLE TERRAIN

ABSTRACT

The doctoral dissertation addresses the development and experimental validation of a simulation model of the interaction between tracked running gear and deformable terrain, aimed at the analysis of motion dynamics and handling characteristics of a high-speed tracked vehicle during turning manoeuvres. Particular attention is devoted to the influence of terrain properties on lateral slip, turning stability, contact forces, and vehicle trajectory, with the research conducted on the example of the infantry fighting vehicle BVP M80A.

Based on a review of existing terramechanics models, the limitations of both computationally demanding advanced approaches and simplified kinematic models that neglect the effects of deformable terrain are identified. As a compromise solution, a mathematical model based on shear stress theory is developed, enabling realistic computation of contact forces while maintaining acceptable computational complexity. Based on the developed mathematical model, a simulation model is implemented in the MATLAB/Simulink environment, and experimental measurements are carried out on the selected vehicle, the results of which are used for validation of the simulation model.

The results demonstrate good agreement between simulation and experimental data, with average deviations in the calculation of longitudinal contact forces during turning not exceeding 8%. Through simulations of vehicle motion on various deformable terrains, the influence of terrain characteristics on lateral slip, turning radius, and contact force distribution is analysed, with a loss of stability observed on terrains of lower bearing capacity. Furthermore, sensitivity analysis of the simulation model with respect to changes in vehicle design parameters, as well as the application of the model in testing automatic control algorithms, indicate that the developed simulation model represents a useful tool for vehicle dynamics analysis, handling assessment, and application in modernisation processes and the development of advanced control systems.

Keywords: high-speed tracked vehicle, track-terrain interaction, deformable terrain, lateral slip, simulation model

Scientific branch/field: Technical-technological sciences/mechanical engineering

Scientific discipline: Motor vehicles and internal combustion engines

САДРЖАЈ

1. Уводна разматрања 1

2. Предмет и циљ истраживања 5

2.1. Предмет истраживања 5

2.2. Циљ истраживања 6

3. Преглед стања у области истраживања 8

3.1. Емпиријски и полуемпиријски модели 12

3.1.1. Бекеров модел притиска и деформације подлоге 13

3.1.2. Janosi–Hanamoto модел 15

3.1.3. Wong–Reece модел 18

3.2. Метода коначних елемената 19

3.3. Метода дискретних елемената 22

3.4. Multi-Body метод 24

3.5. Примена терамеханичких модела 26

3.5.1. Преглед постојећих приступа 27

3.5.2. Источни и западни приступ развоју гусеничних возила 27

3.5.3. Полуемпиријски модели у анализи контакта 28

3.5.4. Модели намењени динамичким симулацијама 28

3.5.5. МДЕ и спрегнути приступи 29

3.5.6. Модели контакта у функцији управљања и аутономије 30

4. Сопствена истраживања 31

4.1. Математички модел интеракције гусенице и подлоге 32

4.1.1. Претпоставке и знаковне конвенције 33

4.1.2. Математички модел кретања гусеничног возила по деформабилној подлози 34

4.1.3. Одређивање смицајног помераја у зони контакта гусенице и подлоге 36

4.1.4. Моделирање нормалног напона у зони контакта 39

4.1.5. Одређивање тангенцијалних сила у зони контакта 42

4.1.6. Одређивање динамичких параметара кретања 44

4.2. Симулациони модел кретања возила 44

4.2.1. Улазне брзине гусеница 47

4.2.2. Кашњење сигнала 48

4.2.3. Главни блок симулационог модела 49

4.2.4. Блок за приказ резултата 56

4.2.5. Дефинисање параметара возила и терена 56

4.3. Експериментална истраживања 58
4.3.1. Анализа система за пренос снаге возила БВП М80А 60
4.3.2. Мерење обртног момента на излазним вратилима трансмисије 63
4.3.3. Мерење угаоних брзина излазних вратила трансмисије 66
4.3.4. Мерно-појачавачки мост и софтвер за прикупљање података 66
4.3.5. Реализација експерименталног мерења 67
5. Резултати истраживања 69
5.1. Валидација симулационог модела 69
5.2. Симулације кретања гусеничног возила по различитим деформабилним подлогама 77
5.2.1. Резултати симулације стабилног заокрета гусеничног возила 79
5.2.2. Резултати симулације нестабилног заокрета гусеничног возила 82
5.2.3. Резултати симулације кретања возила по сложеној трајекторији 87
5.3. Анализа осетљивости модела на промену конструкционих параметара возила 94
5.3.1. Маса возила 95
5.3.2. Висина тежишта возила 99
5.3.3. Момент инерције возила 102
5.3.4. Ширина трага возила 105
5.3.5. Дужина контакта гусенице и подлоге 108
5.3.6. Ширина гусенице 111
5.4. Примена симулационог модела у тестирању рада алгоритама управљања 114
5.4.1. Кинематички модел кретања гусеничног возила 114
5.4.2. Примена PI и PID регулатора у симулационом моделу 116
5.4.3. Резултати употребе PI/PID контролера 118
6. Примена машинског учења у циљу повећања тачности резултата симулационог модела 124
6.1. Подаци за обуку модела машинског учења 124
6.2. Резултати обуке и тестирања модела машинског учења 128
7. Примена развијеног симулационог модела 132
7.1. Прорачун динамике гусеничног возила 132
7.2. Модернизација гусеничних возила 132
7.3. Прорачун оптерећења трансмисије и погонских елемената 133
7.4. Пројектовање хибридних гусеничних возила 133
7.5. Оптимизација и тестирање алгоритама аутоматског управљања 134
7.6. Општа разматрања и перспективе примене 134

8. Закључак 135
8.1. Анализа остварења циља истраживања 135
8.2. Кључни резултати и њихов значај 135
8.3. Примена развијеног симулационог модела 136
8.4. Будући правци истраживања 136
9. Литература 138

1. УВОДНА РАЗМАТРАЊА

Гусенична возила, због својих карактеристика, пре свега високе проходности, имају значајну примену у различитим областима, од пољопривреде, преко грађевинске индустрије, до војне намене. У свакој наведеној области постоје различити захтеви на које гусенична возила треба да одговоре, а неки од најкомплекснијих односе се на војну примену, где се подразумева висока проходност и покретљивост, уз велику масу, као и велике максималне брзине кретања, због које се често за таква возила користи термин брзоходна гусенична возила. Развој таквих возила, пре свега за војну примену, у смислу борбених возила, као што су тенкови или оклопни транспортери, представља велики инжењерски изазов. У току развоја типичних система на брзоходном гусеничном возилу, као што су систем за ослањање, систем за пренос снаге и др., потребно је посебно обратити пажњу на подлогу по којој је предвиђено да се возило креће. Наиме, оваква возила су предвиђена да се у највећем делу свог животног циклуса користе на неуређеним путевима, односно различитим типовима терена. С обзиром на наведено, долази се до закључка да у интеракцији возила са подлогом важну улогу имају њене физичке особине, и поред свих карактеристика које се односе на конструкцију самог возила. Под појмом интеракције подразумева се контакт и међусобно деловање између возила и подлоге, при чему подлога обухвата терен, односно тло по којем се возило креће.

У овој дисертацији представљено је истраживање једног сегмента у развоју брзоходног гусеничног возила. Заправо, приказана је детаљна анализа преноса сила са возила на терен и обрнуто, а све у контексту интеракције гусеница возила са подлогом. Највећи утицај на остваривање и пренос сила на возило има динамика контакта гусенице са подлогом. У том смислу, спроведена су истраживања постојећих модела који се користе за моделирање наведеног контакта. Сагледане су предности појединих модела, али су уочена и многа ограничења која се јављају у процесу моделирања динамике контакта. Након детаљне анализе постојећих истраживања у области терамеханике изабран је оптималан модел који је погодан за модификовање и примену на конкретном брзоходном гусеничном возилу. У раду је приказан детаљан поступак развоја математичког модела интеракције гусеница са подлогом за брзоходно гусенично возило ознаке БВП М80А. Након формирања математичког модела, развијен је симулациони модел динамике кретања брзоходног гусеничног возила у софтверском пакету MATLAB/Simulink. Симулациони модел примарно израчунава силе које се јављају у контакту гусеница и терена, на основу којих рачуна трајекторију возила узимајући у обзир грешку која се јавља услед појаве клизања.

Такође, у раду су представљени и резултати експерименталних испитивања који су коришћени за валидацију симулационог модела. Експериментална мерења имају кључну улогу у развоју и валидацији резултата симулација понашања брзоходних гусеничних возила, посебно у војним применама где су услови рада сложени и захтевни. Упркос напретку у симулационим техникама, прецизне симулације интеракције гусенице и терена остају велики инжењерски изазов због нелинеарне природе контакта и променљивих карактеристика подлоге. Нелинеарности произилазе из нелинеарног напонско-деформабилног понашања подлоге, зависности смицајне чврстоће од нормалног напона и променљивих услова контакта услед клизања и деформације терена. Експериментална мерења представљају важан извор података за анализу динамике контакта гусенице и подлоге, а сами резултати испитивања често нису јавно публиковани. Такође, један од разлога ограничене доступности резултата јесу захтевни услови експлоатације и конструкциона сложеност гусеничних возила, која додатно отежава интеграцију давача и мерне опреме за прикупљање података. Поуздани подаци мерења су од суштинског значаја, не само за валидацију модела, већ и за боље разумевање физичких појава које одређују вучне карактеристике, динамику проклизавања, као и пренос оптерећења на делове система за пренос снаге у реалним условима. Поуздани експериментални подаци представљају основ за развој нумеричких симулација, које су постале важна и готово неизоставна компонента савремених инжењерских приступа моделирању и оптимизацији сложених система.

Постојећи рачунарски алати значајно унапређују разумевање понашања техничких система, омогућавају тачна предвиђања перформанси и оптимизацију конструкционих параметара у различитим инжењерским дисциплинама. Њихова употреба подстиче иновације уз истовремено обезбеђивање безбедности, ефикасности и одрживости, чиме се поједностављује и развој нових и унапређење постојећих решења и технологија. Ипак, експериментална мерења и тестирања у реалним условима остају неопходна за подешавање и валидацију симулационих модела, посебно у проучавању динамике интеракције гусеница и подлоге [1]. Ова потреба је нарочито изражена у развоју аутономних возила, где су тачност и поузданост симулационих модела критични због њихове шире примене у пројектовању и валидацији. На кретање гусеничних возила утиче сложена интеракција терена и гусеница, феномен који зависи од великог броја параметара који описују карактеристике подлоге и понашање возила [2]. Природа овог контакта је веома сложена и захтева познавање напредних математичких модела ради свеобухватног дефинисања и разумевања.

Како је већ наведено, у раду су представљени математички модели који се користе у моделирању контакта гусенице и деформабилног терена, а то су пре свега: емпиријски, полуемпиријски и нумерички модели. Емпиријске методе се заснивају на експерименталним подацима и често користе поједностављене математичке моделе за опис интеракције, док дискретизовани нумерички модели пружају детаљније и прецизније представљање динамике контакта, али захтевају знатно веће хардверске ресурсе за решавање. Полуемпиријски модели комбинују карактеристике оба приступа како би постигли компромис између тачности и ефикасности.

Битне појаве које су анализиране у овом раду јесу проклизавање гусеница и клизање возила, које су нарочито изражене када се возило креће по деформабилним теренима као што су блато или песак. Комбиновани ефекти центрифугалних сила и значајног проклизавања гусеница током заокрета возила доводе до бочног клизања целог возила, што има велики утицај на динамику заокрета и систем управљања. Иако су истраживања у области терамеханике брзоходних гусеничних возила дала значајне научне резултате, истраживање граница стабилности током управљања остаје релативно недовољно проучено. Развој високопрецизног симулационог модела који је приказан у раду пружа снажан оквир за теоријску анализу граница стабилности током заокрета возила на различитим теренима, а која је претходно потврђена експерименталним мерењима.

Поред тога, у корак са актуелним развојем аутономних гусеничних возила, бочно клизање уочено при заокрету возила представља значајну препреку у њиховом развоју, јер појачава вредност сигнала грешке у систему управљања са сваким наредним маневром заокрета. Предложени су бројни приступи за развој математичких модела гусеничних возила, који су од суштинског значаја за напредак технологије аутономних брзоходних гусеничних возила. Научна истраживања издвајају две примарне стратегије моделирања динамике брзоходних гусеничних возила [3]:

- кинематичке моделе, који нуде поједностављен приступ користан за прелиминарну анализу и дизајн управљачких система, али занемарују динамику контакта гусенице и терена, и
- динамичке моделе, који пружају прецизније представљање понашања гусеничних возила током кретања на деформабилној подлози.

Параметри проклизавања у динамичким моделима могу се одредити применом методологије тренутних центара ротације (енгл. Instantaneous Center of Rotation - ICR), која

повезује закривљеност трајекторије и центрифугално убрзање са шест непознатих коефицијената [4]. Сложеност интеракције гусеница и подлоге током значајног проклизавања при управљању, представља изазов за прецизно предвиђање трајекторије кретања [5,6]. Потенцијалне стратегије ублажавања ових изазова укључују унапређивање приступа моделирању смицајних напона који се јављају у контакту гусенице и подлоге, примену повратне спреге у реалном времену и побољшање тачности одређивања параметара проклизавања.

Истраживање које је спроведено у овој дисертацији уводи симулациони модел динамике кретања брзоходног гусеничног возила БВП М80А, који је развијен у MATLAB/Simulink окружењу. Посебан проблем који је решаван симулационим моделом је динамика интеракције гусенице и деформабилног терена. У раду је та интеракција описана помоћу теорије смицајних напона. Додатна вредност развијеног модела огледа се у његовој експерименталној валидацији, односно, у склопу истраживања спроведена су експериментална мерења која су потврдила тачност симулационог модела. Трајекторија возила добијена је нумеричким решавањем диференцијалних једначина кретања, коришћењем сила које се генеришу у току контакта гусеница и терена, а модел је показао и високе могућности интеграције са напредним алгоритмима аутоматског управљања.

2. ПРЕДМЕТ И ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА

Последњих десет година сведоци смо интензивног развоја рачунарске технике (високоперформансни рачунарски системи, edge рачунари, cloud системи и др.) која је омогућила решавање сложених математичких и инжењерских проблема. Ипак, истраживања су и даље усмерена ка развоју нумерички ефикасних модела који обезбеђују задовољавајућу тачност резултата уз минималне хардверске захтеве у погледу потребног процесорског времена за извршавање прорачуна, односно потребних меморијских ресурса. Посебан значај оваквих модела огледа се у њиховој примени у системима који захтевају симулације и предвиђања у реалном времену, као што су аутономна возила и роботски системи.

2.1. Предмет истраживања

Предмет научног истраживања докторске дисертације је развој, анализа и валидација напредног модела за израчунавање сила које настају у контактној зони између гусеница и терена код брзоходних гусеничних возила. Посебан акценат стављен је на динамичко понашање током заокрета и трајекторију возила у случају израженог бочног клизања на деформабилним теренима, што је директна последица природе контакта. Развој нумеричког модела усмерен је ка постизању високе тачности уз минималне рачунарске захтеве, како у погледу процесорског времена, тако и меморијских ресурса, чиме се омогућава извршавање симулација у реалном времену.

Брзоходна гусенична возила представљају специфичну категорију возила намењену кретању по меким, деформабилним и неуређеним теренима, где се класични „точкаши” често показују као неефикасни. Понашање гусеница у контакту са тереном директно утиче на вучне карактеристике, управљивост, стабилност, енергетску и укупну ефикасност возила. Прецизно одређивање сила у контакту гусеница и терена од великог је значаја за правилно пројектовање и оптимизацију погонских система, управљачких механизама, система за ослањање, система за пренос снаге, као и предвиђање бочног клизања возила у различитим условима кретања.

Постојећи модели интеракције гусеница и терена ослањају се на различите теоријске и емпиријске приступе, који имају ограничену применљивост при већим брзинама и сложеним маневарским ситуацијама, нарочито током заокрета. Нелинеарна и хетерогена природа контакта обухвата бројне факторе: структуру и влажност терена, физичке карактеристике терена и гусеница, кинематичке параметре кретања, као и динамичка

оптерећења у различитим режимима кретања. Разумевање и интеграција ових параметара у кохерентни систем омогућавају развој симулационог модела за прорачун сила у реалном, или приближно реалном времену [7]. Даљи напредак у разумевању динамике контакта ограничавају високи трошкови и техничка сложеност експерименталних мерења, због чега је број доступних података веома ограничен.

У оквиру истраживања спроведена је детаљна студија постојећих теоријских модела контакта гусеница и подлоге, критичка анализа и идентификација ограничења. На основу тога развијен је нови симулациони модел са циљем унапређења тачности предвиђања сила и трајекторије кретања услед бочног клизања. За развој је коришћено MATLAB/Simulink софтверско окружење. За експериментална истраживања и развој модела коришћено је брзоходно гусенично возило БВП М80А.

Посебна пажња посвећена је анализи утицаја параметара возила и карактеристика терена на генерисане силе у зони контакта, што омогућава боље разумевање процеса који се одвијају у контакту гусенице и подлоге током кретања. Предмет истраживања обухвата:

- Анализу, формулисање и унапређење математичких и симулационих модела контакта гусеница и деформабилног терена код брзоходних гусеничних возила;
- Анализу и синтезу параметара који утичу на генерисање сила у контакту;
- Валидацију развијеног симулационог модела на основу експерименталних резултата;
- Давање препорука за даљи развој и примену модела у пракси.

Дисертација доприноси унапређењу теоријских основа моделирања интеракције гусеница и подлоге и пружа темељ за будуће истраживачке и развојне пројекте усмерене ка оптимизацији перформанси брзоходних гусеничних возила и предвиђању трајекторије у условима израженог бочног клизања на деформабилним подлогама.

2.2. Циљ истраживања

Основни циљ истраживања је развој и експериментална валидација напредног симулационог модела за прецизну процену динамичких сила у контакту гусеница и подлоге, на примеру возила БВП М80А. Модел треба да омогући поуздану анализу понашања возила у сложеним условима експлоатације, као и анализу трајекторије возила са посебним фокусом на заокрет при израженом бочном клизању на деформабилним подлогама.

Подциљеви истраживања су:

- Критичка анализа постојећих емпиријских, полуемпиријских и нумеричких модела интеракције гусеница и терена с циљем идентификације предности и ограничења, посебно у условима заокрета возила;
- Развој симулационог модела у MATLAB/Simulink софтверском окружењу који интегрише карактеристике деформабилног терена и кључне динамичке параметре возила БВП М80А;
- Развој методологије за предвиђање трајекторије кретања возила узимајући у обзир ефекте израженог бочног клизања на деформабилним теренима;
- Експериментална валидација развијеног модела упоређивањем резултата симулација са стварним подацима добијеним експерименталним мерењима на возилу БВП М80А у реалним условима кретања;
- Анализа и идентификација најзначајнијих параметара возила и терена на генерисане силе у контакту.

3. ПРЕГЛЕД СТАЊА У ОБЛАСТИ ИСТРАЖИВАЊА

У овом поглављу дат је преглед досадашњих научних истраживања која су јавно доступна и која се односе на моделирање и симулацију динамике кретања брзоходних гусеничних возила и њихове интеракције са подлогом. Посебна пажња посвећена је развоју терамеханике као научне основе за проучавање контакта возила и тла, као и различитим приступима моделирању. Приказани су важни теоријски и експериментални резултати који су обликовали савремене моделе за описивање динамике контакта гусеница и деформабилне подлоге.

Почетак развоја гусеничних возила за војне намене везује се за битку на реци Соми која се одиграла 1916. године између савезничких (британских и француских) и немачких снага, у којој се по први пут на фронту појавио тенк. Тачније, у наведеној бици употребљен је тенк под ознаком Mark I британске производње, и представља први оперативни тенк у историји који је ушао у масовну борбену употребу, слика 3.1. Његов учинак на фронту био је изнад очекивања. Успешност првог тенка усмерила је даља истраживања на интензивни развој гусеничних возила, што је обликовало модерне тенкове какви данас постоје. Предност овог концепта возила огледала се у високој проходности. Примена гусеничних кретача омогућила је повећање укупне масе возила, а да специфичан притисак на подлогу остане у границама задржавања високе проходности возила. Такође, повећање масе возила се најчешће односило на повећање оклопне заштите, што је још једна предност гусеничних возила.



Слика 3.1. Mark I у борбеним дејствима (битка на реци Соми 1916. године).

Наравно, цивилни развој гусеничних возила текао је паралелно са војним. Тако су се већ током 1920. године појавили и први гусенични трактори који су коришћени за транспорт материјала и робе [8]. Гусенична возила имала су веома добре вучне карактеристике због самог карактера контакта гусеница и подлоге. Гусенични кретачи су могли да пренесу неупоредиво веће силе на подлогу у односу на постојеће пнеуматике који су се користили. Такође, расподела притиска на подлогу била је много повољнија и показала је још једну предност гусеничног кретача, нарочито на деформабилним теренима [9].

Први развоји гусеничних кретача одвијали су се успорено и ограничено. С обзиром да се ради о релативно новом начину кретања, нису постојали математички модели који би омогућили убрзан развој. Највећи део развоја заснивао се на покушајима који су били у малом броју успешни и претежно су се заснивали на примитивним експерименталним мерењима [10]. Највећу технолошку револуцију гусенична возила доживела су у току Другог светског рата. У војном погледу, у периоду од 1939. до 1945. године тенкови су се трансформисали од првобитних лаких, који су били слабо наоружани и у том тренутку са слабом оклопном заштитом, до тешких тенкова које је одликовала велика ватрена моћ и снажан оклоп (табела 3.1).

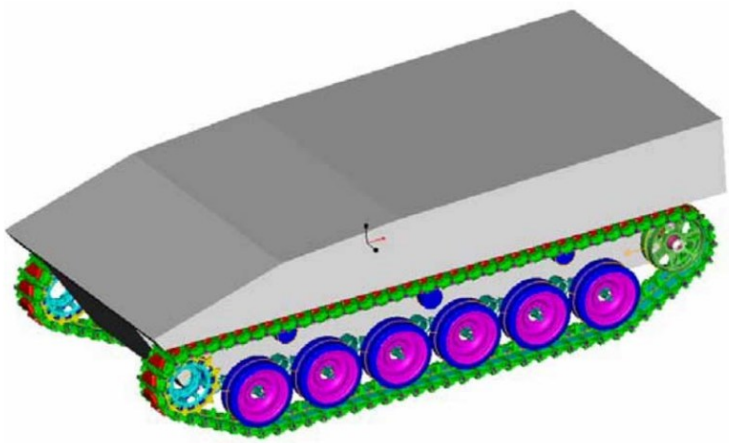
Табела 3.1. Преглед карактеристика дела тенкова коришћених у периоду 1939-1945.

Година	Модел тенка	Тип	Калибар	Оклопна заштита	Максимална брзина	Укупна маса
1939.	Panzerkampfwagen III Ausf. E (Немачка)	средњи	37 mm	15 - 50 mm	40 km/h	23 t
	Panzerkampfwagen IV Ausf. D (Немачка)	средњи	75 mm	30 - 80 mm	38 - 42 km/h	25 t
	Somua S35 (Француска)	средњи	47 mm	20 - 47 mm	40 km/h	19.5 t
	7TP Jednowieżowy (Пољска)	лаки	37 mm	17 mm	37 km/h	9.9 t
1945.	Panzerkampfwagen V Panther Ausf. G (Немачка)	средњи	75 mm	16 - 100 mm	55 km/h	44.8 t
	Iosif Stalin IS-2 Model 1944 (СССР)	тешки	122 mm	120 - 130 mm	37 km/h	46 t
	M4A3E8 Sherman „Easy Eight" (САД)	средњи	76 mm	63 - 76 mm	48 km/h	33 - 42 t
	A34 Comet (Велика Британија)	средњи	77 mm	102 mm	51 km/h	36 t

Како се употреба тенкова опет показала као ефикасна, њихов развој је настављен интензивно и након завршетка Другог светског рата. Највећи продор у научном смислу остварио је пољски професор Мјечислав Грегори Бекер (Mieczysław Gregory Bekker, 1905-1989.) који је радио за америчку војску и свемирску агенцију NASA (енгл. National Aeronautics and Space Administration). Његова књига из 1956. године Theory of Land Locomotion: The Mechanics of Vehicle Mobility представља прво научно дело у области терамеханике, односно сматра се да означава и тренутак дефинисања терамеханике као научне области која проучава интеракцију између подлоге и возила, пре свега гусеничних, и возила точкаша у теренским условима [11]. Бекеров рад поставио је основе за боље разумевање интеракције, како гусеница, тако и точка са подлогом. Ово је омогућило даље значајније унапређење карактеристика теренских возила, које се од овог тренутка заснива на научним сазнањима, за разлику од времена када су се унапређења заснивала на покушајима и интуицији [12]. Како је већ споменуто, средином 20. века формирана је нова научна дисциплина која се бави феноменом контакта возила са тереном. Убрзо затим, долази и до формирања друштва под називом *International Society for Terrain-Vehicle Systems* (ISTVS), чиме су постављени чврсти и стабилни темељи за даљи развој терамеханике, која сада добија и институционалну подршку [13].

Како се развијала теорија о терамеханици, тако је напредовао и развој рачунарске технике. Ова чињеница је јако важна, имајући у виду све већу комплексност математичких модела који су описивали интеракцију гусеница и подлоге. Развој рачунара омогућио је да се развијени математички модели тестирају кроз многобројне симулације. Наравно, у том периоду, готово све методе за моделирање контакта гусенице и подлоге заснивале су се на емпиријским истраживањима, као и параметрима који су одређивани експерименталним методама [14]. Такве симулације имале су бројне проблеме у погледу прецизности и поузданости. Један од главних разлога за ова ограничења лежи у сложености процеса интеракције између гусенице и подлоге. Природу овог контакта одређује велики број међусобно повезаних фактора, што отежава његово прецизно математичко описивање. Неки од њих се односе на геометрију самих чланака гусеница, други на масене параметре возила, карактеристике система за ослањање, а ту су и физичке и хемијске особине земљишта. Једни закони који важе за један тип земљишта, престају да важе за други тип земљишта. Све ово су проблеми који ни данас нису у потпуности истражени и решени. У циљу развоја модела који би објединио све појединачне случајеве, долази до појаве све захтевнијих математичких модела. Због наведеног, развој терамеханике био је ограничен расположивим рачунарским

ресурсима све до појаве рачунара високих перформанси, који су омогућили решавање сложених математичких модела и примену напредних нумеричких метода. Повећањем хардверских могућности, развијене су и нове нумеричке методе за решавање математичких проблема, односно дошло је до развоја специјализованих програмских пакета који су могли да анализирају контакт гусеница и терена применом метода коначних елемената, метода дискретних елемената, али и других нумеричких метода. На овај начин омогућено је да се динамика возила и интеракција гусеница и подлоге моделирају заједно у једну целину, чиме се постижу реалнији и доста веродостојнији резултати. Тренутно најнапреднији рачунарски пакети комбинују ове методе заједно са мултибоди (енгл. Multi-Body) симулацијама, где је могуће истовремено моделирати и анализирати динамику понашања механичких система возила и сложену динамику контакта гусеница и терена, при чему постоји узајамна повезаност динамике возила са динамиком контакта гусеница са подлогом. Пример такве симулације дат је на слици 3.2.



Слика 3.2. Модел гусеничног возила у току симулације у софтверском пакету Adams Tracked Vehicle (ATV) Toolkit.

Програмски пакети који су данас највише постигли у имплементацији наведених метода за моделирање и симулацију су MSC ADAMS car, RecurDyn и MATLAB. Колико је динамика контакта гусеница и терена сложена, говори и податак да поједини програмски пакети развијају посебне додатке и алате који анализирају искључиво динамику контакта возила и терена, и користе се у косимулацијама са другим програмским решењима. Пример таквог додатка је Adams Tracked Vehicle (ATV) Toolkit. Није редак случај ни да се за комплексније анализе користе и косимулације два различита програмска пакета, као што је комбинација MSC ADAMS car и MATLAB-a, где сваки програмски пакет моделира и решава део симулације за коју је специјализован [15].

Као што је претходно наведено, нумеричке методе су се континуирано развијале, а са напретком рачунара добиле су велику примену у свим областима истраживања [16]. У модерном научном и инжењерском оквиру, моделирање интеракције гусеница и подлоге обухвата широк спектар приступа који се континуирано развијају. Тренутно се, поред класичних емпиријских и полуемпиријских модела [17–20], све више користе напредни нумерички модели. Међу њима се издвајају метода дискретних елемената и метода коначних елемената, које омогућавају детаљну симулацију деформација тла и расподеле притисака испод гусеница [21,22]. Према истраживању [23], употреба методе дискретних елемената је заступљенија у моделирању зрнастих терена у односу на методу коначних елемената. Метода дискретних елемената даје значајно боље резултате у процесу моделирања зрнастих материјала за које су карактеристичне велике деформације, и често се користи у косимулацијама са програмским пакетима који користе мултибоди методе за представљање динамике возила [21,24,25]. У спроведеном истраживању [26] истиче се важност коришћења више метода у процесу моделирања, како би анализа обухватила динамике возила, гусеничног кретача, али и терена (подлоге), при чему је оваква свеобухватност модела од великог значаја за поуздано и прецизно сагледавање понашања возила. Ово је посебно изражено код брзоходних гусеничних возила, где конструкција возила битно утиче на динамику гусеничног кретача, а оно на саму подлогу, где су процеси интеракције гусенице и подлоге у временском смислу релативно кратки, са израженим деформацијама.

Супротно методи дискретних елемената, метода коначних елемената терен представља као континуалну целину, има већу примену у моделирању отпора који настају услед копања, али велика ограничења у погледу моделирања значајних деформација терена, због могућности нарушавања континуитета [27]. У сваком случају, метода коначних елемената се показала као веома добра у предвиђању сабијања терена, при чему је за такве симулације потребно претходно одредити граничне услове експерименталним методама [28]. Такође, као алтернативни приступи класичним терамеханичким моделима, у литератури се јављају и методе засноване на прорачунској динамици флуида (CFD - енгл. Computational Fluid Dynamics) [29], али ови приступи нису разматрани у оквиру дисертације.

3.1. Емпиријски и полуемпиријски модели

Емпиријски модели су настали међу првима у току развоја терамеханике, као директан одговор на потребу да се на практичан начин опише интеракција возила и подлоге у условима ограничених теоријских и рачунарских могућности. Они се у потпуности

ослањају на резултате експерименталних мерења и посматрања понашања подлоге под дејством оптерећења, при чему се карактеристике земљишта не описују помоћу фундаменталних закона механике, већ путем експериментално одређених зависности и корелација. Основна предност емпиријских модела огледа се у њиховој једноставности и релативно лакој примени, пошто не захтевају сложене материјалне моделе тла, нити детаљно познавање унутрашњих механизама деформације. Због тога су ови модели дуго били доминантни у инжењерској пракси, посебно у раним фазама пројектовања гусеничних возила и у анализама проходности по различитим типовима терена.

Полуемпиријски модели представљају логичан наставак развоја чисто емпиријских приступа у терамеханици. За разлику од емпиријских модела, који се у потпуности ослањају на експериментално утврђене зависности без директног увођења физичких закона, полуемпиријски модели уводе физички смислене величине и релације које описују понашање земљишта под дејством оптерећења, уз задржавање емпиријски одређених параметара. Кључни допринос у развоју већ споменутих емпиријских, али и полуемпиријских модела интеракције возила и подлоге дао је Бекер, чији су радови поставили темељ модерне терамеханике [11]. Његове основне релације, посебно оне које повезују притисак и деформацију подлоге, и данас представљају полазну основу за велики број аналитичких и нумеричких модела. Даље унапређење Бекеровог приступа предложили су Золтан Јаноши (Zoltan Janosi) и Бен Ханамото (Ben Hanamoto) у [30], који су смицајни напон представили у функцији релативног клизања између гусенице и подлоге. Овим проширењем омогућен је инжењерски прецизнији опис механизама настанка вучне силе, чиме је значајно повећана применљивост модела у анализи кретања гусеничних возила. Значајан допринос даљем развоју терамеханике дали су и Џејмс И. Вонг (James Y. Wong) и његов сарадник Роберт Рис (Robert Reece), који су развили аналитички модел интеракције утискивача и подлоге, познат као Wong–Reece модел [31]. Овај модел омогућава детаљнији опис расподеле напона и деформација у тлу, и представља важну везу између полуемпиријских и напреднијих физички заснованих приступа.

3.1.1. Бекеров модел притиска и деформације подлоге

Међу најпоузданијим чисто емпиријским моделом сматра се Бекеров модел притиска и деформације подлоге. Иако је модел емпиријског карактера, његов значај у терамеханици је изузетан, јер је поставио основу за велики број каснијих аналитичких и нумеричких приступа у анализи интеракције возила са подлогом. Модел је широко распрострањен и даје веома добре резултате у описивању контакта земљишта и утискивача, у овом случају

гусеница. Развој Бекеровог модела везује се за период интензивног развоја војних возила високе проходности, када се јавила потреба за поузданим алатима за предвиђање понашања возила на различитим врстама подлоге. Дотадашњи модели, засновани на класичној теорији еластичности, показали су се недовољним за опис реалног понашања тла, које је карактерисано израженом нелинеарношћу, пластичним деформацијама и зависношћу од геометрије контактне површине.

Бекер је након спроведених експеримената у различитим условима и на различитим типовима земљишта уочио да се притисак, односно отпор земљишта деформацији, може описати степеном функцијом (1):

$$p(z) = \left(\frac{k_c}{b_u} + k_\varphi\right) z^n, \quad (1)$$

где су:

- $p(z)$ - отпор земљишта (притисак услед вертикалног деформисања),
- k_c - коефицијент деформације при чистом сабијању тла,
- b_u - ширина утискивача,
- k_φ - коефицијент деформације при чистом смицању тла,
- z - вертикална деформација тла услед утискивања и
- n - коефицијент нелинеарности.

Овакав приступ омогућио је да се сложени проблеми носивости подлоге сведу на релативно једноставне прорачуне, што је Бекеров модел учинило изузетно погодним за инжењерску примену, нарочито у фази концептуалног пројектовања возила [32,33]. Ипак, Бекеров модел није универзалан за опис понашања земљишта при дејству утискивача, већ да представља неки вид апроксимације.

Параметри k_c, k_φ и n су специфични и зависе од врсте подлоге. Коефицијент k_c описује утицај кохезивних сила унутар земљишта, које су нарочито изражене код глиновитих и влажних подлога. Његов утицај је повезан са ширином контактне површине b_u, што указује на чињеницу да ужи контактни елементи изазивају веће локалне напоне. Коефицијент k_φ представља отпор тла услед унутрашњег трења, и доминира код терена као што су песак и шљунак. За разлику од кохезије, овај допринос притиску није директно условљен ширином контактне површине. Експонент деформације n дефинише облик криве промене притиска у зависности од деформације, и представља показатељ деформационог понашања тла у

смислу његове реакције на оптерећење. Различите вредности овог параметра омогућавају моделу да опише широк спектар терена, од веома меких до релативно чврстих подлога. Вредности наведених параметара одређују се експерименталним путем [18,34,35]. Овако дефинисан модел може да се користи за одређивање носивости терена, што је веома важно у проучавању проходности гусеничних возила на деформабилним подлогама. Такође, модел је погодан и за одређивање дубине колотрага, рачунањем вертикалне деформације тла - z.

У пракси се често користи модификовани Бекеров модел (познат као K-n модел) који користи комбиновани параметар K_k за описивање отпора тла. Комбиновани параметар K_k представља обједињени параметар отпора тла који укључује утицај кохезионих и фрикционих својстава подлоге, односно параметара k_c и k_φ, као и ширине контактне површине.

$$p(z) = K_k z^n \tag{2}$$

Прецизност ових модела највише је условљена и зависи од правилног одређивања параметара који се користе у једначинама. Највећа предност Бекеровог модела је његова једноставност и мали број улазних параметара, док је један од највећих недостатака претпоставка да је контакт са земљиштем квазистатичан, те се тако занемарују динамичке појаве које се јављају у контакту возила са подлогом. Такође, модел занемарује и постојање смицајног напона, смицање тла и клизање, али без обзира на то, даје кључну вертикалну компоненту контактног стања, због чега служи као основа за већину полуемпиријских модела, који се надограђују на њега, додајући му компоненту за опис смицајних напона. Још један недостатак овог модела је потреба да се за сваку врсту контакта, односно за различите комбинације утискивача и земљишта, одреде адекватни параметри који веродостојно описују баш ту комбинацију контакта. Без обзира на степен сложености модела, параметри који описују деформацију подлоге остају основа за дефинисање механичког одзива у контакту са гусеницом [36].

3.1.2. Janosi–Hanamoto модел

Janosi–Hanamoto модел је један од најзначајнијих модела у терамеханици који се користи за математичко описивање динамике контакта подлоге и гусеничног возила. Модел су развили Золтан Јаноши и Бен Ханамото 1961. године са циљем да се аналитички опише развој смицајног напона у контакту између возила и подлоге, као и његова зависност од релативног клизања. Основна предност Janosi–Hanamoto модела огледа се у томе што на

релативно једноставан начин повезује локалну деформацију подлоге са генерисаном вучном силом, уз увођење параметара који имају јасно физичко значење и могу се експериментално одредити. Због тога је овај модел постао стандардни део аналитичких и нумеричких приступа у анализи интеракције возила и терена, нарочито у случају меких и растреситих подлога као што су песак, земља или снег.

Једна од главних одлика Janosi–Hanamoto модела је његова заснованост на Кулоновом закону трења (енгл. Coulomb's law of friction) и смицајном напону. Према Кулоновом закону трења максимални смицајни напон у подлози јавља се у тренутку појаве и најмањег померања слојева тла, и може се представити следећом једначином:

$$\tau_{max} = c + \sigma tan\phi\,, \tag{3}$$

где је:

- c - кохезија тла,
- σ - нормални напон и
- ϕ - угао унутрашњег отпора тла на смицање.

Овај модел настао је из потребе да се опишу смицајни напони који се јављају у току контакта возила са тереном. Одређивањем смицајног напона могуће је одредити вучне силе које делују на возило, затим кочне силе, али и отпоре који се јављају у току контакта возила са подлогом. Janosi–Hanamoto модел представља надоградњу теорије коју је развио Бекер и претходно приказаног Кулоновог закона трења. Њихова претпоставка је да смицајни напони који се јављају у контакту возила и земљишта прво расту са повећањем вредности смицања тла, све до тренутка када долази до засићења када смицајни напон достиже максималну вредност. Ова претпоставка веродостојније описује стварно понашање подлоге у односу на Кулонов закон.

Модел полази од претпоставке да се у слоју земљишта дебљине z јавља деформација услед смицања тла која зависи од помераја j, па се смицајни напон може израчунати на следећи начин:

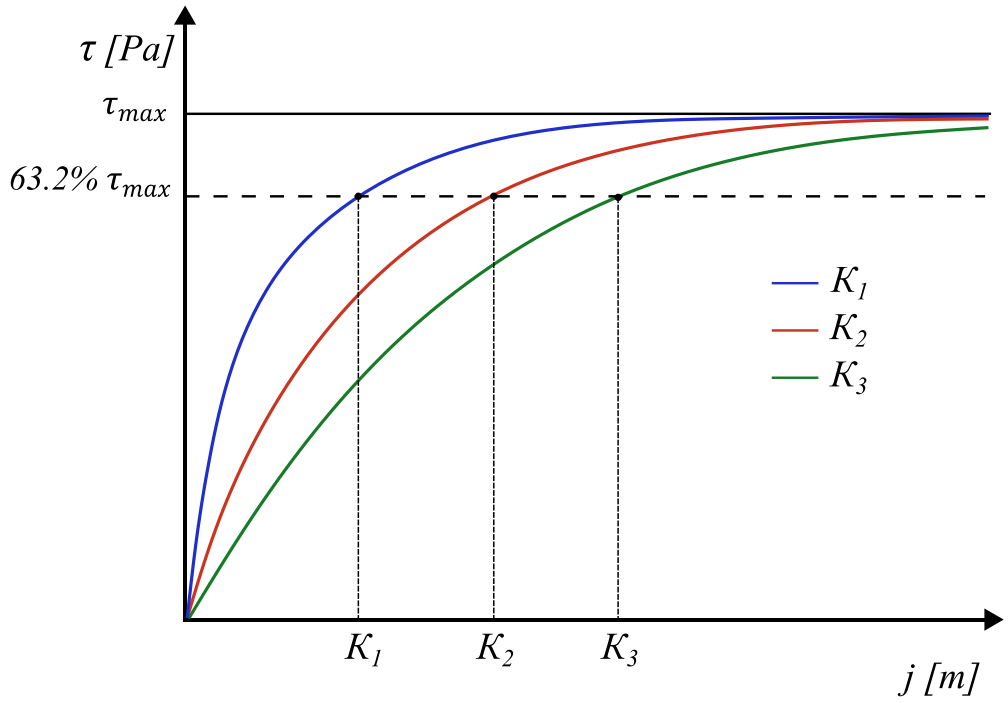
$$\tau = \tau_{max}\left(1 - e^{-\frac{j}{K}}\right) = (c + \sigma tan\phi)\left(1 - e^{-\frac{j}{K}}\right), \tag{4}$$

где је:

- τ - напон смицања,

- τ_{max} - максимална вредност напона смицања,
- j - померај услед смицања и
- K - модул деформације.

Слика 3.3 показује да смицајни напон постепено расте са порастом смицања подлоге све док не достигне максималну вредност [21,37]. Може се уочити да модул деформације K описује брзину прираштаја смицајног напона. Вредност параметра K се одређује експерименталним путем, при чему ниже вредности одговарају чврстим подлогама, док веће вредности параметра одговарају мекшим подлогама. Такође, са приказане зависности промене напона смицања, може се закључити да када нема смицајног помераја ($j = 0$), тада је вредност смицајног напона такође нула ($\tau = 0$). У тренутку када је $j = K$, тада према једначини (4), смицајни напон износи 63.2% максималне вредности смицајног напона (τ_{max}). И коначно, када смицајни померај достиже „бесконачне" вредности ($j = \infty$), тада смицајни напон достиже максималну вредност ($\tau = \tau_{max}$). Код гусеничних возила, смицајна деформација тла није константна дуж контактне површине, већ расте од предњег ка задњем делу гусенице. На улазном делу контакта релативно померање је мало, па су и смицајни напони мали. Са кретањем дуж контактне дужине, релативно померање се повећава, што доводи до постепеног повећања смицајног отпора. Применом Janosi–Hanamoto модела могуће је одредити локалну расподелу смицајних напона дуж гусенице, а њиховом интеграцијом и укупну вучну силу коју возило може да оствари на датој подлози.



Слика 3.3. Зависност промене напона смицања услед смицајне деформације подлоге.

Слично као и код Бекеровог модела, и остали параметри који се користе за моделирање смицајног напона у контакту одређују се експерименталним путем. Методе за одређивање коефицијената су стандардизоване, чиме се повећава поузданост и поновљивост мерења. Модел је веома прихваћен у терамеханици и често се користи за моделирање контакта гусеница и подлоге. Такође, користи се у нумеричким симулацијама динамике кретања возила, где је потребно израчунати силе које делују на возило, а које су последица контакта са подлогом [38]. Модел се показао као веома поуздан и у случају где је потребно предвидети клизање возила и моменте који делују на возило [39]. Упркос својој широкој примени, Janosi–Hanamoto модел не описује адекватно интеракцију возила и подлоге у условима изражених динамичких оптерећења и великих брзина кретања, јер не узима у обзир сложене механизме деформације тла, који имају значајан утицај на кретање возила [40].

3.1.3. Wong–Reece модел

Wong–Reece модел представља значајан допринос у области терамеханике, надовезује се на Бекерову теорију притиска и деформације у терену и Janosi–Hanamoto модел смицања, при чему је посебна пажња на свеукупном контакту возила и подлоге [41,42]. Заправо, модел представља комбинацију претходна два наведена модела. Овај модел је развијен са циљем да омогући реалнију процену вучних карактеристика гусеничних возила, укључујући расподелу нормалних и смицајних напона дуж контактне површине, као и укупну вучну силу и отпор кретању. Због тога Wong–Reece модел представља природну надоградњу Bekker и Janosi–Hanamoto модела и често се сматра њиховом синтезом.

Основна идеја Wong–Reece модела заснива се на чињеници да интеракција гусенице и подлоге није једнодимензионални проблем. Контактна зона има коначну дужину, а нормални и смицајни напони се не распоређују равномерно, већ зависе од локалног положаја дуж гусенице, локалне деформације тла и релативног клизања. Модел полази од претпоставке да је нормални притисак у контактној зони одређен Бекеровим моделом притиска и деформације тла, док се развој смицајног напона у свакој тачки контакта описује Janosi–Hanamoto моделом. На тај начин, Wong–Reece модел повезује геометрију гусенице, механичка својства подлоге и кинематичке услове кретања у јединствен аналитички опис. Односно, за моделирање вертикалних карактеристика контакта возила и терена користи се модификован Бекеров модел представљен једначином:

$$p(x) = \left(\frac{k_c}{b_u} + k_\varphi\right) z(x)^n. \tag{5}$$

Измена у овој једначини у односу на оригинални Бекеров модел односи се на промену зависности p, односно промена притиска је представљена у зависности од хоризонталне координате x, која представља хоризонталну удаљеност места контакта од референтне тачке, односно од почетка контакта (нпр. предња ивица гусенице у контакту са подлогом). Из приказане једначине може се уочити да се и вертикална деформација тла такође представља у зависности од хоризонталне координате x.

За моделирање хоризонталне карактеристике контакта, односно смицајних напона, користи се модификовани Janosi–Hanamoto модел који је представљен једначином:

$$\tau(x) = \tau_{max}\left(1 - e^{-\frac{j(x)}{K}}\right) = (c + \sigma(x)tan\phi)\left(1 - e^{-\frac{j(x)}{K}}\right). \quad (6)$$

Слично претходном, и у овом случају је зависност смицајног напона представљена у односу на хоризонталну координату x. Решавањем једначина (5) и (6) омогућено је анализирање напонских стања и деформација, како у вертикалном, тако и у хоризонталном правцу дуж целог контакта гусенице. За сваку тачку у зони контакта, дефинисану координатом x, могу се одредити локалне вредности деформације тла, нормалног напона, смицања тла и напона смицања.

Иако је Wong–Reece модел значајно напреднији у односу на појединачне моделе нормалне и смицајне интеракције гусеница и подлоге, и даље се заснива на одређеним поједностављењима. Подразумева квазистатичке услове кретања, хомогено тло и занемаривање динамичких ефеката, као и деградације подлоге услед понављаног проласка гусенице. Упркос тим ограничењима, бројна експериментална истраживања показала су да модел даје веома добро поклапање са експерименталним резултатима понашања тла у току контакта са гусеницама.

3.2. Метода коначних елемената

Метода коначних елемената (МКЕ) постаје јако занимљива област са развојем суперрачунара. Разлог томе лежи у чињеници да захтева велике рачунарске ресурсе, а развој суперрачунара омогућио је значајно унапређење ове методе, која је своју примену пронашла у многим научним областима, нарочито у машинству у прорачунима чврстоће конструкције. Основна идеја ове методе је да се једна коначна запремина неког тела представи са коначно малим запреминама (3D модели) или површинама (2D модели) које се називају коначни елементи. Елементи су међусобно повезани, а места везе се називају чворови [43,44]**.** Кроз наведени процес дискретизације, сложени проблем се своди на систем алгебарских

једначина који је потребно решити [45]. Анализа коришћењем МКЕ се спроводи у три корака. Први корак је претпроцесирање, затим постављање и решавање система једначина, и на крају постпроцесирање.

У току претпроцесирања дефинише се врста проблема која се решава, односно да ли се ради о структуралној, термодинамичкој, нелинеарној, динамичкој или анализи понашања флуида. За примену МКЕ потребан је и 3D модел, а сама израда 3D модела употребом специјализованих CAD (енгл. Computer-Aided Design) програмских пакета припада такође претпроцесирању. Затим следи избор типа коначних елемената (троугласти, четвороугаони, тетраедарски, хексаедарски и др.) који ће се применити на процес дискретизације, након чега се дефинишу параметри материјала. На слици 3.4 приказан је дискретизован модел чланка гусенице и подлоге, а сама дискретизација представља један од најважнијих корака у претпроцесирању [46,47]. На добијене резултате симулација значајно утичу дефинисање граничних и почетних услова, као и избор и задавање параметара материјала, што представља важан део фазе претпроцесирања.

За сваки коначни елемент формира се сет једначина које описују његово понашање, након чега се формира систем једначина. То се постиже повезивањем коначних елемената преко њихових заједничких чворова, а резултујући глобални систем једначина приказан је једначином (7):

$$[K]\vec{U} = \vec{F}, \tag{7}$$

где је:

- $[K]$ - матрица крутости,
- $\vec{U}$ - вектор померања и
- $\vec{F}$ - спољашње оптерећење.

Решавање система једначина представља сложен процес. У овој фази користи се МКЕ solver (рачунарски алгоритам за решавање система једначина) за израчунавање непознатих величина и решавање система једначина. Претходно је потребно дефинисати на који начин ће МКЕ solver решавати систем једначина. За решавање је могуће користити директне или итеративне методе. Код итеративних метода потребно је дефинисати да ли се ради о методама са фиксним или променљивим кораком итерације [48].

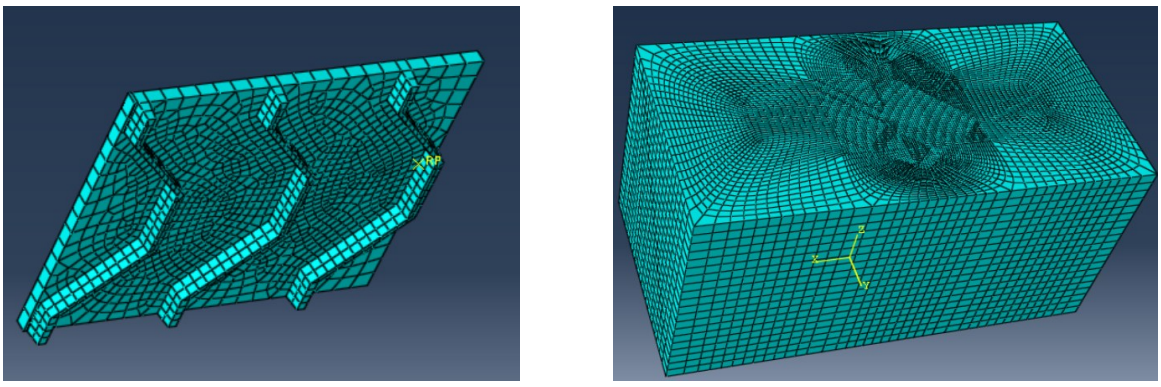
У последњем кораку, врши се анализа, тумачење и визуализација резултата [49]. Резултати се најчешће приказују на различитим графиконима у боји где се могу детаљно

анализирати померања или напонска стања. Такође, није ретка ни пракса да се резултати приказују и путем анимација, где се у току времена могу анализирати промене које настају.

Употреба МКЕ у решавању проблема терамеханике не заостаје у односу на друге њене примене. Напротив, за моделирање сложених интеракција гусеница и подлоге често се користи МКЕ, при чему се за анализу контакта узимају у обзир и особине материјала (како терена тако и гусенице) и њихове геометријске карактеристике [50]. Напредне МКЕ технике, као што је Coupled Eulerian – Lagrangian метод, омогућавају моделирање великих деформација терена, а које су специфичне за брзоходна гусенична возила [51].

У поређењу са емпиријским и полуемпиријским методама, употреба МКЕ у моделирању контакта гусенице и подлоге даје доста тачније резултате. Експериментална мерења спроведена ради валидације симулација заснованих на МКЕ показала су висок степен сагласности са резултатима симулација [23,52]. Помоћу МКЕ могуће је моделирати различите врсте подлоге, са различитим карактеристикама према деформисању у току контакта са гусеницом.

Значајан недостатак МКЕ је тај што се у случају постојања великог броја коначних елемената, а њихов број је важан са аспекта прецизности симулације, повећавају рачунарски захтеви симулације. У пракси се често дешава да процес решавања симулације за неке једноставније моделе интеракције гусенице и терена траје сатима. Због сложености модела, често се моделирају само полумодели, или чак и четвртмодели, да би се смањили потребни рачунарски ресурси, у случају да постоји геометријска симетрија, као и да уведено оптерећење симетрично делује на тело. Проблем који се јавља код стандардних МКЕ су велике деформације, које могу представити лажно понашање система и бити извор нетачности [53–55]. У неким случајевима могуће га је превазићи коришћењем адаптивне методе за измену мреже, чиме се оптимизује мрежа у складу са деформацијама терена [51].



а) б)

Слика 3.4. Дискретизовани нумерички модел (чланак гусенице (а), подлога (б)) [56].

Проблем великих деформација се пре свега односи на зрнасте терене, као што је песак. Заправо, МКЕ такав терен представља као континуалан, што не одговара стварном понашању материјала. За анализу контакта гусенице са зрнастим тереном метода дискретних елемената дала је значајно боље резултате [55,57,58].

Иако и даље постоје велики изазови у области изучавања контакта гусенице и подлоге, МКЕ ће још дуго бити алат који ће пружати најбоље резултате за боље разумевање и оптимизацију контакта гусеница и подлоге. Анализирајући убрзани развој рачунара, као и имплементацију машинског учења у процес моделирања, претпоставља се да ће МКЕ у будућности давати још веродостојније резултате симулација динамике контакта гусеница возила са подлогом.

3.3. Метода дискретних елемената

Метода дискретних елемената (МДЕ) спада у групу нумеричких метода која терен моделира као скуп честица које имају своје особине. Ова метода је готово идеална када је потребно моделирати карактеристике зрнастог материјала, где постоји независно кретање честица, као у случају песка, шљунка и др. У односу на МКЕ где се терен моделира континуално и где постоје ограничења у виду већих деформација, МДЕ омогућава моделирање великих деформација терена [22,23,55]. Основна идеја МДЕ је моделирање терена као скуп појединачних честица које генеришу силе и моменте у тренутку међусобног контакта [59]. Честице се моделирају да буду сферног облика, али се развијају и модели другачије геометрије [60]. Пример симулације интеракције гусеница и подлоге засноване на МДЕ дат је на слици 3.5.

У току симулације, у сваком кораку итерације проверава се да ли је дошло до контакта између честица. У случају да је дошло до контакта рачунају се силе које су генерисане у току контакта. Силе се разлажу на нормалне и тангенцијалне компоненте које делују у тачки контакта [61]. За моделирање контактних сила најчешће се користи Hertz – Mindlin модел који претпоставља да се судар честица дешава на малој површини и да су материјали еластични, чиме се релативно прецизно може представити микромеханика зрнастих материјала [62,63]. Након одређивања контактних сила, могуће је одредити и кретање сваке честице применом Њутнових (Newton) закона кретања и интеграцијом добијених сила које делују на сваку честицу у сваком кораку симулације, према следећем:

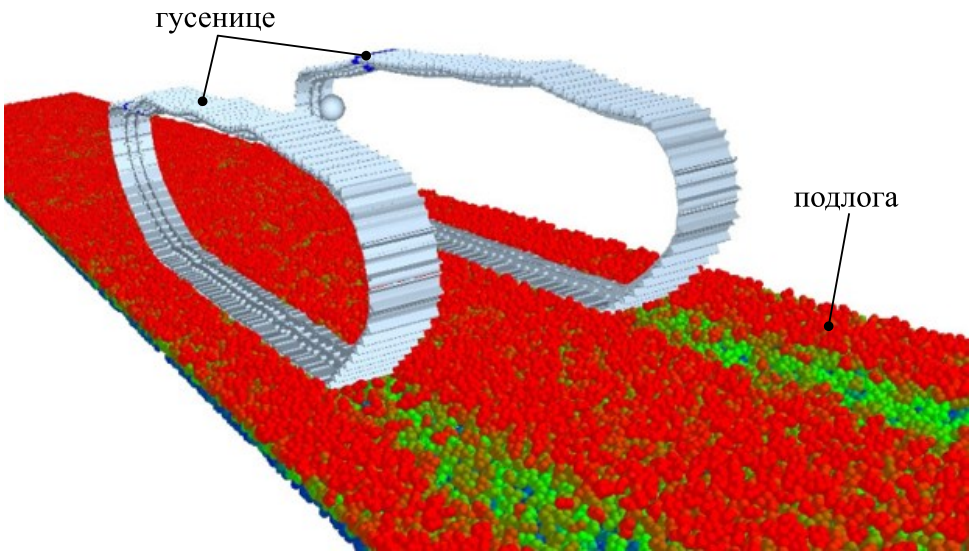
$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum \vec{F}_{ij} + \vec{F}_g + \vec{F}_s \ , \tag{8}$$

$$I_i \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \sum \vec{M}_{ij} + \vec{M}_s \ , \tag{9}$$

где је:

- m_i - маса i-те честице,
- $\vec{r}_i$ - вектор положаја i-те честице,
- I_i - момент инерције i-те честице,
- $\vec{F}_{ij}$ - сила у контакту i-те и j-те честице,
- $\vec{F}_g$ - сила гравитације,
- $\vec{F}_s$ - спољашње силе,
- $\vec{M}_{ij}$ - момент у контакту i-те и j-те честице и
- $\vec{M}_s$ - спољашњи момент отпора.

Након израчунавања транслаторних и угаоних убрзања одређује се положај честица за следећу временску итерацију. На овај начин омогућено је моделирање великих деформација терена, а најбољи резултати се постижу у моделирању зрнастих терена, зато што се већ у самом почетку моделирања узима у обзир дискретна карактеристика материјала [21,22,64]. Ова метода даје значајно боље резултате у односу на полуемпиријске Бекерове моделе. Поред добијања информација о силама и моментима који се јављају у току контакта, резултати симулације пружају и јасан увид како настају деформације и како се мењају у току времена.



Слика 3.5. Приказ МДЕ симулације контакта гусенице и зрнастог материјала [65].

Највећи недостатак ове методе је идентичан као и код МКЕ, а то су рачунарски ресурси. С обзиром да МДЕ у свакој итерацији симулације рачуна све силе које настају у контакту моделираних честица, извршавање симулације захтева значајне рачунарске ресурсе. Такође, моделирање несферичних облика честица додатно повећава захтеве за хардвером рачунара. Додатно се процес моделирања успорава и тиме да се подаци о честицама често апроксимирају, имајући у виду да је експерименталним путем веома тешко одредити неке параметре, као што су коефицијент трења или еластичност честица подлоге [66]. У истраживању [67] предложена је дводимензионална метода за МДЕ моделирање интеракције два чланка гусенице и подлоге. На овај начин смањени су потребни рачунарски ресурси, а добијени резултати симулације у великој мери се поклапају са резултатима спроведених експерименталних мерења.

Због велике рачунарске захтевности, симулације применом МДЕ по правилу није могуће спроводити у реалном времену. Слично као и код МКЕ, може се очекивати да ће МДЕ са даљим развојем рачунарских капацитета и нових технологија, попут машинског учења, добијати све већи значај, при чему ће се време извршавања симулација значајно смањивати. Иако захтевна у погледу рачунарских ресурса, МДЕ показује значајан потенцијал у анализи интеракције гусеница и подлоге [68].

3.4. Multi-Body метод

Multi-Body метод (МБМ) представља напредни нумерички алгоритам који анализира динамичко понашање система који се састоји од више међусобно повезаних тела. Та тела су најчешће крута, али за добијање прецизнијих и поузданијих решења могу се моделирати и као еластична. Овај метод је нашао велику примену у моделирању сложених система као што су возила, нарочито гусенична. За развој симулационог модела возила неопходно је моделирати и услове у којима се возило креће, а пре свега карактеристику терена. МБМ метода се често користи заједно са МКЕ или МДЕ како би се у потпуности моделирало окружење у коме се возило креће. На овај начин повезује се динамичко понашање возила и пренос сила са возила на терен, а самим тим остварују се реалније симулације контакта гусеница и подлоге, јер је у симулацију укључено и динамичко понашање возила.

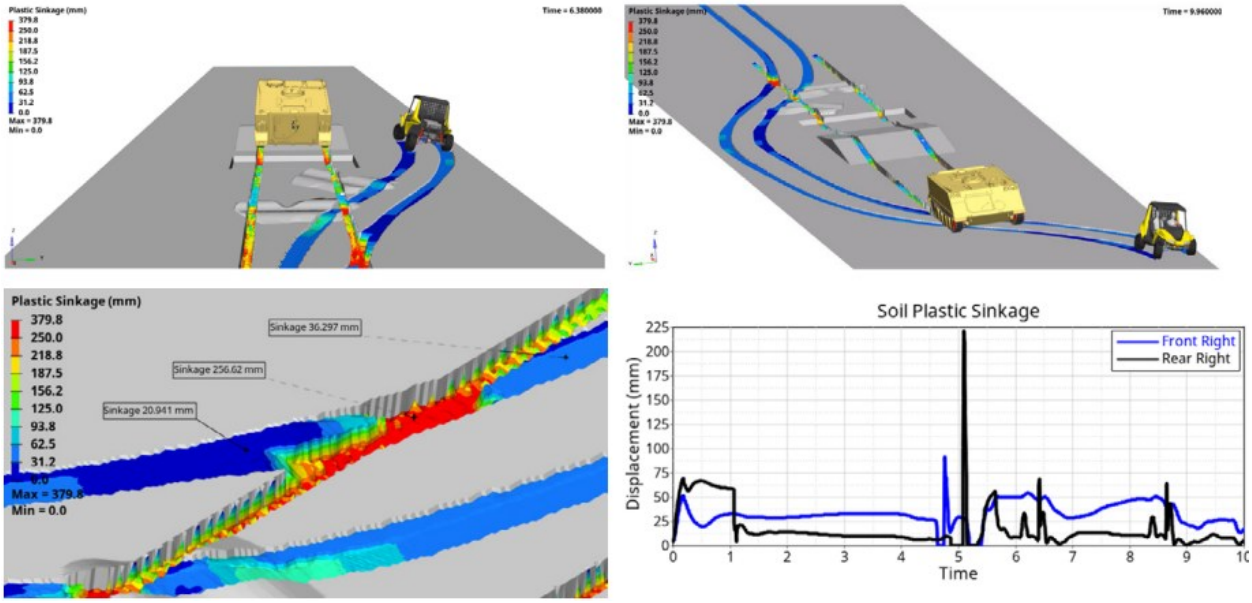
Наведено представља једну од највећих предности примене МБМ у комбинацији са терамеханичким моделима, односно могућност остваривања двосмерне везе између динамике возила и понашања подлоге. Промене у динамичком понашању возила, као што су осцилације возила или промена оптерећења појединих потпорних точкова гусеничног кретача и др., директно утичу на расподелу нормалних и смицајних напона у контактној

зони. Истовремено, промене у понашању подлоге, као што су локално повећање улегнућа или смањење смицајног отпора, утичу на динамички одговор возила. Ова двосмерна интеракција не може се адекватно описати класичним аналитичким моделима, али се природно јавља у оквиру МБМ симулација.

Кључни корак ка веродостојнијем моделирању интеракције возила са подлогом представља увођење модела терена у МБМ симулацију. У најједноставнијем случају, терен се може моделирати као крута подлога са дефинисаним контактним законом. Међутим, за анализу кретања по деформабилним подлогама, неопходно је применити напредније приступе. У пракси, терен се често моделира као засебан нумерички систем. У таквим симулацијама, Бекеров модел обезбеђује одређивање локалног нормалног притиска на основу деформације подлоге, док Janosi – Hanamoto модел дефинише развој смицајног напона у функцији релативног померања. Ови напони се затим преводе у контактне силе које делују на гусеницу у оквиру МБМ модела.

Поред наведеног, ова врста симулација омогућава да се возило посматра као скуп, крутих или еластичних тела, са свим својим карактеристикама. За свако тело потребно је дефинисати масу, центар масе и момент инерције, а између тела је потребно дефинисати везе. Дефинисањем веза које могу бити ротације или транслације, дефинише се и како ће се тела релативно кретати једна у односу на друга при дејству оптерећења, и како ће се између тела преносити оптерећења. Кретање сваког тела се рачуна применом Њутнових закона кретања или Лагранжових (Lagrange) једначина другог реда. Пример употребе овог метода за моделирање динамике кретања гусеничног возила на деформабилној подлози дат је у [69], док су на слици 3.6 приказани резултати МБМ симулације кретања возила по деформабилној подлози који су представљени у [10].

Овај метод има велику употребну вредност, посебно када је упарен са одговарајућим нумеричким моделом терена. Резултати добијени оваквим симулацијама пружају значајно више информација о процесу контакта гусеница и подлоге и омогућавају квалитетнију анализу и оптимизацију појединих система возила. На овај начин могу се оптимизовати, између осталог, систем ослањања и систем за пренос снаге, чији је утицај на контакт гусенице и подлоге изражен, али се не може адекватно анализирати применом једноставнијих метода. Примена МБМ такође значајно доприноси процесу пројектовања возила, јер смањује потребу за израдом физичких прототипова и спровођењем скупих експерименталних испитивања.



Слика 3.6. Приказ резултата МБМ симулације интеракције возила са подлогом [10].

Са друге стране, као и друге напредне нумеричке методе, МБМ захтева значајне рачунарске ресурсе, тако да време потребно за извршавање симулација може износити и више часова. Поред тога, с обзиром на сложеност процеса моделирања и велики број елемената који утичу на резултате, неопходна је посебна пажња приликом дефинисања параметара модела. И веома мале грешке у унетим вредностима могу довести до значајних одступања у погледу тачности симулације. Како број независних елемената у оваквим моделима може износити и више стотина, при чему сваки елемент има више параметара које је потребно дефинисати, сложеност моделирања постаје посебно изражена. Додатно усложњавање модела настаје приликом увођења нелинеарних елемената, као што је терен, или моделирања еластичних деформација појединих компонената, као и у случајевима комбиновања више нумеричких метода, када је неопходно посебно водити рачуна о избору временског корака симулације.

3.5. Примена терамеханичких модела

У претходним поглављима приказане су савремене методе које се користе за моделирање интеракције гусенице и подлоге, укључујући емпиријске и полуемпиријске терамеханичке моделе, као и нумеричке приступе засноване на методу коначних елемената, методу дискретних елемената и мултибоди моделима динамике возила. Сваки од наведених приступа одликује се одређеним предностима и ограничењима, која се пре свега огледају у нивоу физичке веродостојности, сложености моделирања и рачунарској захтевности.

У инжењерској пракси често је неопходно направити компромис између прецизности симулације и времена потребног за њено извршавање, посебно у случајевима анализе

сложених динамичких процеса интеракције гусенице и деформабилне подлоге. Због тога се у литератури могу уочити различити приступи, прилагођени конкретним циљевима истраживања, расположивим ресурсима и захтевима у погледу тачности резултата. Оваква разноликост условила је да се проблем динамике контакта гусенице и подлоге проучава коришћењем различитих комбинација аналитичких, нумеричких и мултибоди модела, при чему сваки од њих заузима одређено место у зависности од нивоа детаљности и области примене.

3.5.1. Преглед постојећих приступа

Имајући у виду разноврсност приступа који се користе у анализи интеракције гусенице и подлоге, у истраживању [28] је дат систематичан преглед савремених метода у области терамеханике. Истакнуто је да су емпиријске методе довољно поуздане за почетне инжењерске процене перформанси возила, док полуемпиријски модели представљају компромисно решење које обезбеђује повољан однос између рачунарске ефикасности и тачности, уз задржавање применљивости на различите конфигурације возила.

У погледу МКЕ, као главна предност издваја се могућност детаљног моделирања деформација подлоге, пре свега процеса сабијања. Са друге стране, МДЕ се показује као нарочито погодна за опис дисконтинуалне природе зрнастих материјала, као што је песак. МБМ се издваја као моћан алат за анализу динамике целокупног возила, али уз напомену да рачунарска захтевност значајно расте, нарочито при примени напредних модела подлоге.

3.5.2. Источни и западни приступ развоју гусеничних возила

Значајан историјски и методолошки контекст дат је у истраживању [13], у којем се анализира развој гусеничних возила источне производње. Иако у овом приступу терамеханика није била експлицитно формулисана као засебна научна дисциплина, показано је да је примена емпиријских и полуемпиријских метода омогућила значајан напредак у развоју гусеничних система. Ови модели су дуго представљали основу за прорачун проходности и динамичких карактеристика, а њихова употреба је задржана и у каснијим фазама развоја.

Супротно томе, студија [70] пружа увид у западни приступ, у ком терамеханика заузима централно место као научна основа развоја гусеничних возила. Аутори наглашавају интензивни развој примењених метода, од једноставних емпиријских релација ка сложеним нумеричким и мултибоди моделима. Посебан акценат стављен је на тежњу ка симулацији динамике возила у реалном времену, што се препознаје као кључно за развој система за

контролу проклизавања, оптимизацију преноса снаге и повећање проходности, нарочито у војним применама.

3.5.3. Полуемпиријски модели у анализи контакта

У циљу смањења рачунарске сложености, у научном чланку [1] је примењен TRR (енгл. Terrain Response – TRR) алгоритам за предвиђање контактних сила између гусенице и подлоге. За моделирање вертикалних деформација коришћен је Бекеров модел притиска и деформације подлоге, док је за смицање подлоге примењен Wong–Reece модел. Валидација је извршена експерименталним мерењима, при чему је показано да се уз релативно ниске рачунарске захтеве може постићи висока тачност резултата.

Примена класичних аналитичких релација приказана је и у истраживању [18], где је Бекеров модел коришћен као основа за процену деформације и носивости подлоге. Само истраживање указује на једноставност и транспарентност приступа, али и на ограничења која произилазе из квазистатичких претпоставки и поједностављене расподеле притиска.

Аналитички модел расподеле притиска испод гусенице развијен у [71,72] омогућава одређивање локалних вредности нормалног напрезања дуж контактне дужине. Резултати показују значајан утицај карактеристика система за ослањање и масе возила, као и да расподела притиска није равномерна и да зависи од карактеристика система за ослањање и масе возила. Представљено аналитичко решење пружа јасан увид у утицај појединих параметара на расподелу притиска испод гусеница, али модел не обухвата динамичке ефекте нити локалне промене контактних услова.

Слично томе, у истраживању [35] је средњи максимални притисак предложен као индикатор покретљивости гусеничних возила на деформабилним подлогама. Иако овај приступ омогућава брзу глобалну процену проходности, он подразумева губитак информација о локалним појавама у контакту, што га чини мање погодним за детаљне динамичке анализе.

3.5.4. Модели намењени динамичким симулацијама

Значајан корак ка динамичким симулацијама представља научни рад [20], у ком је развијен модел интеракције гусенице, потпорних точкова и подлоге, директно намењен динамичким симулацијама гусеничних возила. Модел омогућава анализу динамичке прерасподеле оптерећења дуж гусенице и симулацију реалистичних сценарија кретања уз умерене рачунарске захтеве.

У научној студији [2] је предложен нови модел контакта и клизања, намењен анализи динамике гусеничних возила. Развијени контактни модел упарен је са општим динамичким моделом гусеничног возила, који је дефинисан ограниченим бројем параметара, као што су маса возила, положај центра масе, број потпорних точкова и силе преднапрезања у гусеници. Посебан допринос рада огледа се у могућности симулације стања мировања возила, чиме се избегавају проблеми нумеричке конвергенције присутни у ранијим моделима. Развијени модел је потврђен експерименталним испитивањима, при чему је показано добро подударање резултата симулације и мерења. Оваква формулација контакта омогућава стабилне и поуздане динамичке симулације у условима честих промена режима кретања.

Примена МБМ приказана је у истраживању [69], где је контакт са деформабилном подлогом моделован кроз нормалне и смицајне силе које утичу на динамику возила. Контактни модел је формулисан тако да генерише нормалне и смицајне силе на основу локалних контактних услова, које се затим користе као улаз у динамичке једначине кретања возила. Резултати показују да динамички одговор возила значајно зависи од карактеристика система за ослањање и генерисаних контактних сила, што доводи до неуједначене расподеле оптерећења по гусеници. Модел омогућава детаљан увид у локалне реакције и унутрашње силе, што је од значаја за пројектовање и оптимизацију система возила. Са друге стране, захтева пажљиву параметризацију контактних закона и може бити осетљив на избор параметара подлоге.

Утицај геометрије гребена чланка гусенице анализиран је у истраживању [41], где је показано да конструкциони параметри гусенице значајно утичу на смицајни отпор и вучне перформансе возила. Истовремено је указано на ограничену могућност генерализације резултата услед осетљивости на параметре подлоге и геометрије.

3.5.5. МДЕ и спрегнути приступи

Примена МДЕ за симулацију интеракције гусенице и песковите подлоге приказана је у [64], уз експерименталну валидацију. Резултати показују да МДЕ омогућава идентификацију локалних механизама деформације и кретања материјала, али уз значајне рачунарске захтеве и потребу за пажљивом калибрацијом параметара.

Даљи корак представља спрегнути МБМ – МДЕ приступ приказан у [65], који омогућава реалистично моделирање великих деформација подлоге и њихов утицај на стабилност возила. Иако је физичка веродостојност изузетно висока, истакнуто је да је

оваква методологија погоднија за истраживачке студије и валидацију него за брзу оптимизацију.

Рачунарски ефикасан приступ представљен је у истраживању [73], у коме је развијен модел за симулацију у реалном времену заснован на редукованим терамеханичким релацијама. Резултати спроведеног истраживања јасно илуструју компромис између физичке веродостојности и брзине израчунавања.

3.5.6. Модели контакта у функцији управљања и аутономије

Значајан број научних студија користи моделе контакта гусеница и подлоге као основу за развој алгоритама управљања. У истраживањима [74] и [75] анализирана је динамика заокрета при израженом бочном клизању, при чему је Janosi–Hanamoto модел искоришћен за развој напредних динамичких модела управљања, чија је тачност потврђена кроз експериментална истраживања.

Кинематички приступи са идентификацијом клизања приказани су у [5], где је применом проширеног Калмановог филтера (енгл. Extended Kalman Filter – EKF) постигнута значајно већа тачност предвиђања трајекторије возила. Такође, истраживања [76] и [77] указују на предности динамичких модела у односу на кинематичке, посебно у контексту аутономних гусеничних возила и сложених услова кретања.

Последњих година, примене машинског учења, као у [78], усмерене су ка предвиђању параметара подлоге на основу експерименталних података, чиме се отвара могућност даљег унапређења економичности и применљивости постојећих терамеханичких модела.

На основу свега претходно наведеног може се закључити да у литератури не постоји јединствен приступ који би истовремено обезбедио висок ниво физичке веродостојности, ниску рачунарску захтевност и применљивост у реалном времену. Избор одговарајућег модела за опис контакта у великој мери зависи од циља анализе, нивоа детаљности и расположивих рачунарских ресурса. Приказана истраживања јасно указују на потребу прилагођавања приступа конкретним условима примене, што представља основу за даља разматрања у наставку рада.

4. СОПСТВЕНА ИСТРАЖИВАЊА

Сопствена истраживања спроведена су кроз три међусобно повезане целине које заједно чине јединствен методолошки оквир за анализу динамике контакта гусенице и подлоге. Прва целина односи се на развој математичког модела који описује основне механизме интеракције гусенице и подлоге у динамичким условима кретања. Друга целина обухвата развој симулационог модела заснованог на формираном математичком опису, који омогућава нумеричку анализу понашања система у различитим режимима кретања. Трећа целина обухвата експериментална мерења спроведена са циљем валидације тачности и применљивости развијеног математичког и симулационог модела.

Математички модел развијен је на основу анализе постојећих терамеханичких приступа и сазнања изнетих у претходним поглављима дисертације, која се односе на интеракцију гусеница и подлоге. Полазећи од утврђених аналитичких и полуемпиријских релација за опис контакта, модел је додатно проширен једначинама које описују динамику кретања возила, чиме је омогућено разматрање временски зависних појава, као што су прерасподела оптерећења, проклизавање и промене режима кретања. На тај начин остварена је веза између локалних контактних процеса и глобалног динамичког понашања возила. Такође, изабрани постојећи математички модел је оптимизован за примену на возилу БВП М80А и проширен је системом једначина које описују праволинијско кретање. Након овог проширења, развијени математички модел описује динамику кретања возила како при праволинијском кретању, тако и при заокрету, било да се ради о заокрету у десну или у леву страну.

На основу развијеног математичког модела формиран је симулациони модел у софтверском окружењу MATLAB/Simulink. Изабрано окружење омогућава ефикасно решавање система диференцијалних једначина, као и флексибилну анализу утицаја најважнијих параметара на динамички одзив система. Симулациони модел омогућава испитивање понашања возила у контролисаним условима, као и анализу сценарија који су у пракси тешко експериментално изводљиви.

У циљу валидације развијеног симулационог модела, спроведена су експериментална мерења на брзоходном гусеничном возилу БВП М80А. Током реализације самог експеримента мерени су обртни моменти на погонским вратилима, на основу којих су одређене силе које делују на гусенице у подужном правцу возила. Добијени експериментални подаци коришћени су за поређење са резултатима симулација, чиме је омогућена објективна процена тачности и поузданости развијеног модела.

Развијени математички и симулациони модел, у оквиру сопствених истраживања, представља допринос бољем разумевању сложене динамике интеракције гусеничних возила са различитим типовима подлоге, при различитим режимима кретања, и обезбеђује основу за даљу анализу резултата приказаних у наредном поглављу.

4.1. Математички модел интеракције гусенице и подлоге

Након анализе постојећих математичких и симулационих модела за прорачун сила у контакту гусеничног возила и подлоге, закључено је да модели засновани на МКЕ и МДЕ омогућавају веома детаљан опис локалних појава у контакту и, у одређеним условима, постижу високу тачност у поређењу са експерименталним мерењима, што је приказано у радовима [22,23,55,65]. Међутим, овакви модели су, по правилу, рачунарски изузетно захтевни, а време потребно за извршавање симулација контакта може бити веома дуго (од неколико десетина минута до неколико часова, у зависности од нивоа дискретизације и дужине симулације). Због тога, њихова директна примена није погодна у случајевима када је циљ израчунавање контактних сила у реалном времену, нарочито у контексту праћења трајекторије кретања возила или примене у алгоритмима управљања.

Сходно томе, као основа за развој математичког модела усвојен је полуемпиријски приступ, који подразумева нешто ниже нивое тачности у односу на МКЕ и МДЕ, али са друге стране захтева значајно мање хардверске ресурсе. У складу са подциљевима дисертације, тежиште је стављено на предвиђање сила у хоризонталној равни контакта, јер њихова правилна процена омогућава адекватно моделирање динамике кретања возила у условима појаве клизања, односно проклизавања гусеница, што је нарочито изражено током маневра заокрета. У том смислу, релевантно је истраживање [79] у ком је показано да модел кретања гусеничне платформе, ради реалистичног предвиђања трајекторије, мора да обухвати управљачке утицаје и ефекте клизања гусеница, који у динамичком смислу представљају значајан поремећај у систему управљања.

Разматрајући компромис између поузданости и рачунарске ефикасности, као и могућност даљег проширења и оптимизације, у први план се издвојио Janosi–Hanamoto полуемпиријски модел. Иако овај модел експлицитно не описује вертикалну деформацију подлоге услед утискивања гусенице, његов утицај је индиректно присутан кроз нормални напон σ који описује стање подлоге, а који директно зависи од притиска којим возило делује на подлогу, што се може закључити из једначине (4). Имајући у виду да је у овом истраживању примарни циљ поуздан прорачун тангенцијалних (хоризонталних) контактних сила, наведено ограничење инжењерски је прихватљиво, уз услов да се расподела

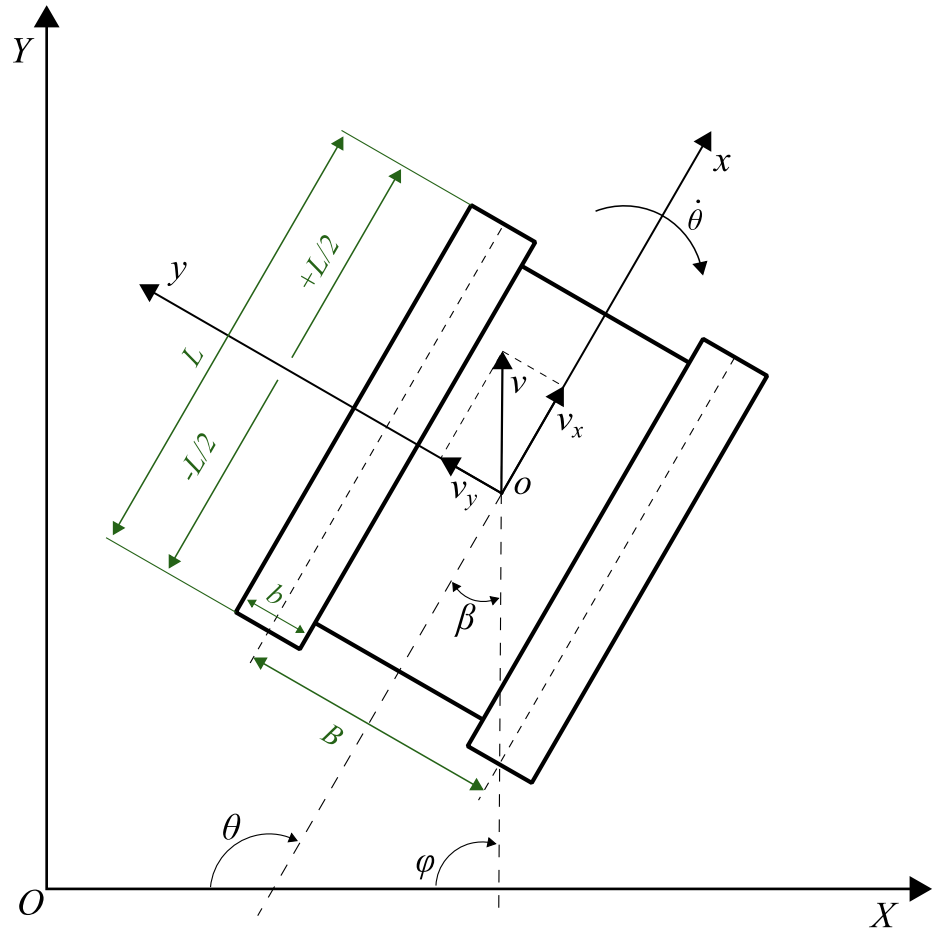
нормалног напона дуж контактне површине усвоји на начин који обезбеђује адекватну тачност и нумеричку стабилност. Овај модел пре свега одликују ниски хардверски захтеви, што је предуслов за извршавање прорачуна у реалном времену. Квалитетно оптимизовани модели су показали у, одговарајућим сценаријима, и јако добре резултате у поређењу са експерименталним мерењима. Истраживања у области терамеханике, која се баве проучавањем интеракција између возила и терена, истичу Janosi–Hanamoto модел као веома прецизан приступ за математичко моделирање сложене динамике контакта [41,73,80].

4.1.1. Претпоставке и знаковне конвенције

Да би модел био јасан, доследан и погодан за нумеричку имплементацију, уводе се следеће претпоставке и знаковне конвенције:

- Возило се креће по хоризонталној подлози, односно кретање је ограничено на раван XOY.
- Возило се разматра као круто тело, ефекти нагињања (енгл. roll) и пропињања (енгл. pitch) нису експлицитно моделирани.
- Уводе се два координатна система:
    - XOY: инерцијални систем везан за подлогу;
    - xoy: систем везан за возило, са почетком у тежишту возила.
- У почетном тренутку оба координатна система су коинцидентна, а оријентација возила се описује углом закретања θ око z - осе.
- Контактна дужина гусенице је L, ширина гусенице је b, а растојање између оса гусеница је B (слика 4.1).
- У оквиру модела усваја се да је ширина гусенице b константна, а интеграција контактних величина врши се дуж уздужне координате x, у границама од $-L/2$ до $L/2$.
- Нормални напон који се јавља у подлози означава се као σ, и директна је последица притиска p којим возило делује на подлогу.
- Параметри подлоге (c, ϕ, K) у Janosi–Hanamoto моделу усвајају се као константни у оквиру контактне зоне у току извршавања појединачних симулација.
- Ефекат система ослањања није експлицитно моделиран преко елемената ослањања, његов утицај на расподелу нормалног напона уводи се редуковано, преко усвојене апроксимације расподеле притиска.

- Клизање/проклизавање гусеница је дозвољено, и представља битан механизам који условљава развој смицајног помераја и тангенцијалних сила у контакту.



Слика 4.1. Гусенично возило у току десног заокрета.

Овако дефинисане претпоставке ограничавају домен примене модела, али обезбеђују погодан баланс између физичке веродостојности, једноставности и рачунарске ефикасности, што је од посебног значаја за примену у симулацијама које се извршавају у реалном времену.

4.1.2. Математички модел кретања гусеничног возила по деформабилној подлози

Кретање гусеничног возила представља сложен процес, јер се највећи део кретања остварује уз клизање/проклизавање гусеница. Овај феномен је значајно изражен у току заокрета возила. Разлог томе налази се у чињеници да гусенично возило остварује заокрет тако што систем за управљање омогућава и обезбеђује различите брзине премотавања гусеница, услед чега долази до заокрета возила. У праволинијском кретању брзине премотавања гусеница су идентичне, док на возило делују силе отпора кретања (отпор пута, отпор ваздуха, отпор убрзања, отпор успона и др.). У току заокрета, брзине премотавања гусеница су различите, а поред сила отпора које делују на возило, јављају се и силе отпора

заокрета. Како би у прорачуну били обухваћени сви отпори кретања, усвојено је да се гусенично возило налази у процесу заокрета у десну страну, слика 4.1. Наведени положај возила искоришћен је за постављање основних једначина кретања. Овај приступ омогућава детаљну анализу интеракције између гусеница и терена током кретања возила, што је кључно за прецизно разумевање и моделирање динамике возила [50].

Као што је већ наведено, за потребе дефинисања кретања возила усвојена су два координатна система. Први координатни систем је XOY и представља инерцијални систем везан за подлогу. Други координатни систем xoy круто је везан за возило и користи се за израчунавање помераја подлоге услед смицања. Координатни почетак xoy поклапа се са тежиштем возила, док је x - оса координатног система паралелна са уздужном осом гусеничног возила [81]. Модел се заснива на претпоставкама да се возило креће по терену без нагиба (ограниченом на XOY раван) и да се у почетном тренутку координатни почеци и осе оба координатна система поклапају. Усвојена претпоставка омогућава поједностављење кинематичких и динамичких једначина, док се истовремено задржава релевантност за анализу сила у контакту гусеница и терена (слика 4.2).

На основу слике 4.1, анализом усвојених координатних система, могуће је израчунати брзину и убрзање возила. Ако се усвоји да v_x представља компоненту брзине возила дуж x - осе, а v_y компоненту брзине дуж y - осе, укупна брзина и убрзање брзоходног гусеничног возила дуж x - и y - осе могу се изразити следећим једначинама:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}, \tag{10}$$

$$a_x = \dot{v}_x + v_y\dot{\theta} \text{ и} \tag{11}$$

$$a_y = \dot{v}_y - v_x\dot{\theta}, \tag{12}$$

где је:

- θ угао закретања гусеничног возила.

Положај возила у инерцијалном координатном систему одређује се интеграцијом брзине. Ради једнозначности и избегавања забуна у знаковима, у наставку се користи стандардна веза између оријентације вектора брзине у инерцијалном систему и углова θ и β, где је β угао бочног клизања, дефинисан као одступање вектора укупне брзине од правца x - осе система везаног за возило. Вредност овог угла је директно повезана са стабилношћу

и управљивошћу возила, а његово прецизно одређивање је од велике важности за тачно предвиђање динамичког понашања гусеничног возила [82]. Познавање тачне вредности угла бочног клизања значајно утиче на прецизност одређивања трајекторије возила. Такође, овакав приступ омогућава праћење и предвиђање кретања гусеничног возила током маневра (заокрета) на основу интеракције гусенице и подлоге, кроз одређивање сила у контакту [74].

На тај начин добија се трајекторија кретања возила у функцији времена, односно $X(t)$ и $Y(t)$, што представља основу за праћење путање у условима клизања током комплетног маневра. Трајекторија гусеничног возила у инерцијалном координатном систему одређена је помоћу следећих једначина:

$$X(t) = -\int v\cos(\theta - \beta)\, dt \text{ и} \tag{13}$$

$$Y(t) = \int v\ \sin(\theta - \beta) dt. \tag{14}$$

4.1.3. Одређивање смицајног помераја у зони контакта гусенице и подлоге

Као што је већ истакнуто, кључну величину у Janosi–Hanamoto полуемпиријском моделу представља смицајни померај који настаје услед релативног кретања гусенице у односу на подлогу. Управо ова величина повезује кинематику кретања возила са развојем смицајног напона у контактној зони и, последично, са генерисањем тангенцијалних сила које утичу на динамику кретања возила.

Да би се омогућио аналитички прорачун смицајног помераја, уводе се карактеристичне тачке T_r и T_l на десној и левој гусеници, које се налазе унутар контактне зоне између гусенице и подлоге. Положај ових тачака дефинисан је у координатном систему везаном за возило xoy, при чему се уздужна координата x_{tr} односно x_{tl} мења у опсегу од $-L/2$ до $L/2$, док су попречне координате фиксиране на вредности $-B/2$ и $B/2$ за десну и леву гусеницу, респективно. На овај начин контактна зона је јасно дефинисана и омогућено је праћење релативног кретања дуж целе дужине гусенице.

Брзине релативног кретања, односно брзине смицања у тачкама T_r и T_l, могу се одредити као разлика између брзине кретања возила и локалне брзине премотавања гусенице. Уздужне и попречне компоненте брзина смицања за десну и леву гусеницу изражене су једначинама (15) – (18):

$$v_{sxr} = v_x - \frac{B}{2}\dot{\theta} - u_r, \tag{15}$$

$$v_{sxl} = v_x + \frac{B}{2}\dot{\theta} - u_l, \tag{16}$$

$$v_{syr} = v_y - x_{tr}\dot{\theta} \text{ и} \tag{17}$$

$$v_{syl} = v_y - x_{tl}\dot{\theta}, \tag{18}$$

где су:

- v_{sxr} и v_{sxl} - брзине смицања тачака T_r и T_l на десној и левој гусеници дуж x - осе, респективно,
- v_{syr} и v_{syl} - брзине смицања тачака T_r и T_l на десној и левој гусеници дуж y - осе, респективно и
- u_r и u_l - обимне брзине десног и левог погонског точка, респективно.

Вектори брзине проклизавања леве и десне гусенице разложени су на компоненте дуж x- и y- осе возила, односно v_{sxl}, v_{syl} за леву гусеницу и v_{sxr}, v_{syr} за десну гусеницу, као што је приказано на слици 4.2. Применом једначина (15) - (18) укупне брзине смицања, v_{sl} и v_{sr}, у тачкама T_r и T_l могу се одредити на следећи начин:

$$v_{sr} = \sqrt{{v_{sxr}}^2 + {v_{syr}}^2} \text{ и} \tag{19}$$

$$v_{sl} = \sqrt{{v_{sxl}}^2 + {v_{syl}}^2}. \tag{20}$$

Угао γ, који описује оријентацију вектора брзине смицања у односу на уздужну осу возила, има важну улогу у одређивању правца деловања смицајних сила. Дефинисан је једначинама (21) и (22) и директно зависи од односа уздужне и попречне компоненте брзине смицања.

$$\gamma_r = arccos\left({v_{sxr}}/{v_{sr}}\right) \tag{21}$$

$$\gamma_l = arccos\left({v_{sxl}}/{v_{sl}}\right) \tag{22}$$

Интеграцијом брзине смицања по времену добија се смицајни померај, који представља акумулирану релативну хоризонталну деформацију подлоге у контактној зони. При томе се користи чињеница да је време контакта појединачне тачке гусенице са подлогом повезано са брзином премотавања гусенице, што омогућава аналитичко изражавање смицајног

помераја као функције уздужне координате. На тај начин добијају се изрази (23) - (26) за компоненте смицајног помераја дуж x - и y - осе.

$$j_{xr} = \int v_{sxr}\, dt = \left(\frac{v_{sxr}}{u_r}\right)\left(\frac{L}{2} - x_{tr}\right) \tag{23}$$

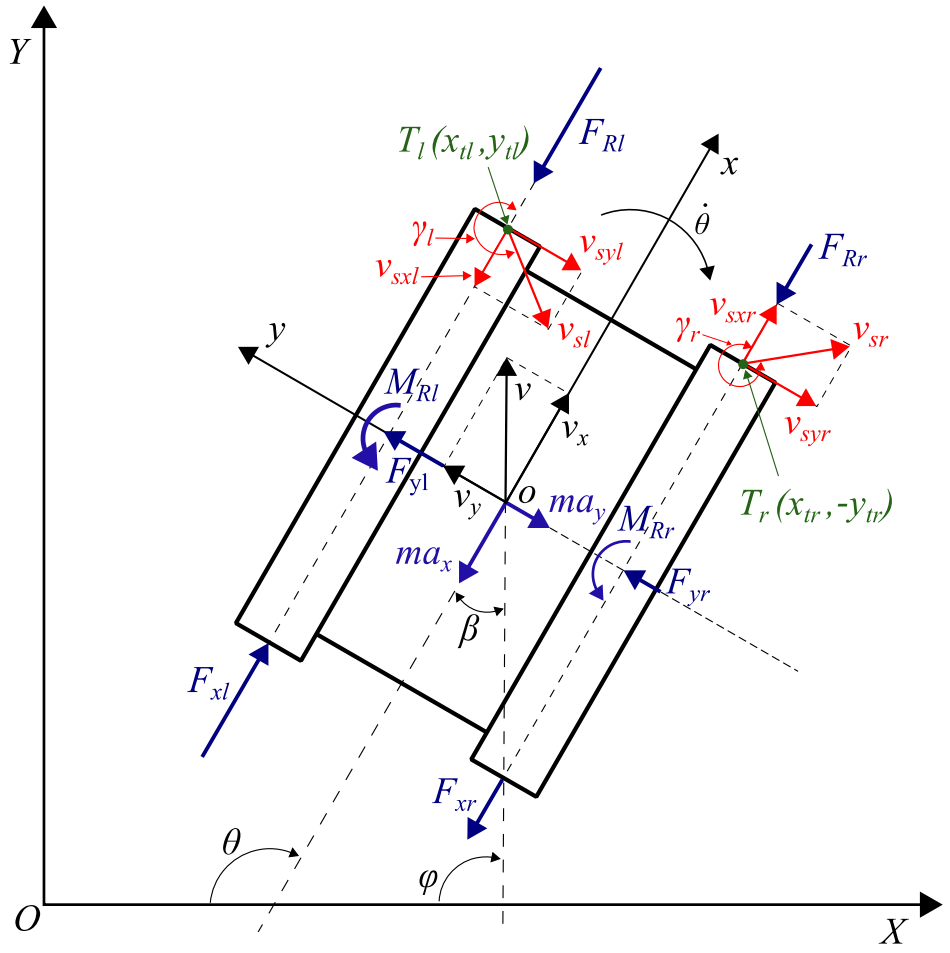
$$j_{xl} = \int v_{sxl}\, dt = \left(\frac{v_{sxl}}{u_l}\right)\left(\frac{L}{2} - x_{tl}\right) \tag{24}$$

$$j_{yr} = \frac{1}{u_r}\left(v_y - \frac{L}{2}\dot{\theta}\right)\left(\frac{L}{2} - x_{tr}\right) + \frac{1}{2u_r}\dot{\theta}\left(\frac{L}{2} - x_{tr}\right)^2 \tag{25}$$

$$j_{yl} = \frac{1}{u_l}\left(v_y - \frac{L}{2}\dot{\theta}\right)\left(\frac{L}{2} - x_{tl}\right) + \frac{1}{2u_l}\dot{\theta}\left(\frac{L}{2} - x_{tl}\right)^2 \tag{26}$$

где су:

- j_{xr} и j_{xl} смицајни помераји дуж x - осе за десну и леву гусеницу, респективно и
- j_{yr} и j_{yl} смицајни помераји дуж y - осе за десну и леву гусеницу, респективно.



Слика 4.2. Шема спољашњих оптерећења возила током десног заокрета.

Укупни смицајни помераји за десну (j_r) и леву (j_l) гусеницу, дефинисани једначинама (27) и (28), представљају улазне величине у Janosi–Hanamoto модел и омогућавају анализу постепеног повећања смицајног напона од уласка тачке у контактну зону до њеног изласка.

$$j_r = \sqrt{{j_{xr}}^2 + {j_{yr}}^2} \tag{27}$$

$$j_l = \sqrt{{j_{xl}}^2 + {j_{yl}}^2} \tag{28}$$

4.1.4. Моделирање нормалног напона у зони контакта

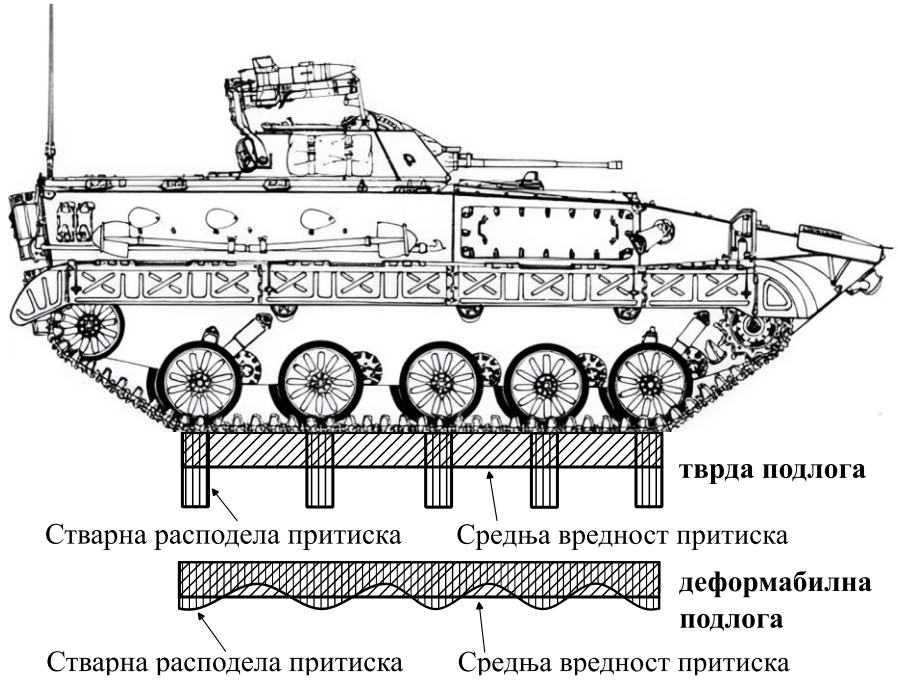
Нормални напон у контакту гусенице и подлоге има двоструку улогу у развијеном моделу. Са једне стране, одређује величину притиска којим гусеница оптерећује подлогу, док са друге стране директно утиче на максималну вредност смицајног напона који се може развити у контактној зони, у складу са Janosi–Hanamoto моделом.

Током праволинијског кретања, расподела нормалног напона дуж контактне дужине гусенице може се сматрати приближно симетричном. Међутим, у току маневра заокрета, услед дејства инерцијалних сила и прерасподеле оптерећења, долази до значајне асиметрије у расподели притиска, како дуж једне гусенице, тако и између леве и десне гусенице. Ова појава је нарочито изражена код брзоходних гусеничних возила, услед великих бочних убрзања која доводе до појаве значајних инерцијалних сила. Када гусенично возило започне маневар заокрета, расподела сила по гусеницама постаје неравномерна. Та асиметрија може довести до бочног померања тежишта возила и промене нормалног притиска дуж контактних површина, што захтева детаљну анализу расподеле контактног притиска, која се значајно мења приликом маневара [83]. При већим брзинама, инерцијалне силе постају израженије, појачавајући ове ефекте и мењајући динамику контакта гусеница и терена. Комбинација динамичког преноса оптерећења, повећаних бочних сила и смањене равномерности контакта са подлогом, може довести до критичних појава нестабилности, као што су бочно клизање, или чак превртање возила.

Током промене правца кретања гусеничног возила, инерцијалне силе имају значајан утицај на расподелу оптерећења између леве и десне гусенице, и стога их је неопходно узети у обзир приликом анализе динамичког понашања возила. Стварна расподела контактног притиска између чланака гусенице и терена веома је неравномерна - вредност притиска приближава се нули у зонама где чланци гусеница нису ослоњени између суседних

потпорних точкова, а достиже максималне вредности испод самих потпорних точкова где се вертикална оптерећења директно преносе на подлогу [84]. На ову расподелу утичу број, размак и конструкција потпорних точкова, крутост и пригушење система за ослањање, геометрија и преднапрезање гусенице [71,85,86].

Утицај крутости система за ослањање на расподелу притиска дуж контакта гусенице и подлоге, као и развој одговарајућег математичког модела, представљени су у [87–90]. У овим истраживањима аутори анализирају како промена крутости система за ослањање утиче на пренос и расподелу оптерећења испод гусеница током заокрета. Поред тога, тврдоћа подлоге и величина чланка гусенице играју значајну улогу у обликовању специфичне расподеле притиска [91]. Слика 4.3 приказује стварну расподелу притиска у зависности од врсте терена. У појединим случајевима, максимална вредност специфичног притиска може знатно премашити просечну, што је важно при процени покретљивости возила и његове способности савладавања различитих врста терена (проходности).

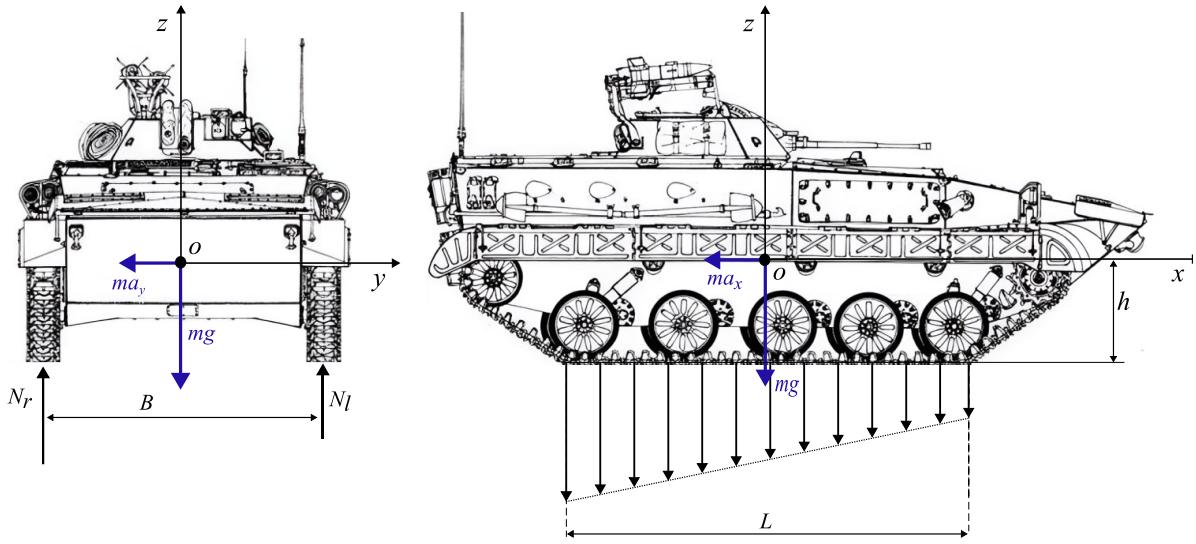


Слика 4.3. Поређење стварне расподеле притиска испод гусеничног возила на тврдом и деформабилном терену.

Резултати истраживања [76] и [92] показали су да је притисак гусенице на подлогу углавном концентрисан испод потпорних точкова. Слично томе, истраживање [74] показало је да расподела притиска испод гусенице прати правоугаони образац директно испод потпорних точкова. Даље, ради поједностављивања математичког моделирања расподеле притиска, у истраживању [75] усвојена је линеарна расподела притиска, при чему су добијени резултати симулација били у прихватљивим инжењерским границама.

Имајући у виду наведено, а с обзиром на то да линеарна апроксимација расподеле притиска даје довољно тачне резултате, у овој дисертацији иста је усвојена за моделирање расподеле оптерећења на обе стране гусенице. Као што је раније истакнуто, ово поједностављење уведено је ради смањења процесорског времена потребног за нумерички прорачун, са циљем омогућавања симулације у реалном времену.

Слика 4.4*а* приказује вертикалне контактне силе које делују између возила и подлоге у случају постојања бочног убрзања a_y, у току заокрета у десну страну. Постојање убрзања a_y довешће до прерасподеле вертикалних контактних сила, при чему ће доћи до повећања вредности вертикалне силе N_r на десној гусеници. Усвојени модел линеарне расподеле притиска на подлогу, у присуству инерцијалне силе ma_x која делује у супротном правцу од x - осе, приказан је на слици 4.4*б*.



а) *б*)

Слика 4.4. Расподела оптерећења испод гусенице: (а) Вертикалне контактне силе између гусеница и терена током заокрета у десно; (б) Линеарна апроксимација расподеле притиска изазване инерцијалним силама.

Међутим, у случају скретања у лево при израженом бочном клизању, јавља се инерцијална сила ma_y која сада делује у правцу y - осе, која изазива повећање тежине и притиска на левој гусеници, док се на десној јавља супротан ефекат, што у коначном резултира смањењем притиска на подлогу.

У случају убрзања возила у правцу x - осе и полазећи од равнотеже сила и момената [75], јединични притисак гусенице на подлогу, за десну и леву страну, у функцији координата x_{tr} и x_{tl}, може се изразити на следећи начин:

$$p_r = \frac{mg}{2bL} + \frac{ma_y h}{BbL} - \frac{6ma_x h x_{tr}}{bL^3} \text{ и} \tag{29}$$

$$p_l = \frac{mg}{2bL} - \frac{ma_y h}{BbL} - \frac{6ma_x h x_{tl}}{bL^3}. \tag{30}$$

Једначине (29) и (30) представљају линеарну апроксимацију расподеле притиска испод десне и леве гусенице, описујући начин промене нормалног напона σ у подлози (терену) дуж контакта са гусеницама као функцију уздужних координата x_{tr} и x_{tl}.

4.1.5. Одређивање тангенцијалних сила у зони контакта

Након дефинисања јединичног притиска који гусенице врше на подлогу, анализирани су ефекти свих сила које делују на гусенично возило током маневра десног заокрета. Занемаривањем утицаја система за ослањање, постаје могуће изоловати утицај динамике контакта гусеница и подлоге у току заокрета. У наведеном случају, дејство свих сила на возило током маневра десног заокрета на хоризонталном терену приказано је на слици 4.2.

Полазећи од усвојеног Janosi–Hanamoto модела за описивање контакта гусенице и подлоге, зависност између смицајног напона и помераја који настаје, може се представити једначином (4). Анализирајући слику 4.2, силе F_{xr} и F_{xl} представљају компоненте смицајних сила које делују у зони контакта на десну и леву гусеницу у правцу x - осе, респективно. Силе F_{yr} и F_{yl} су одговарајуће компоненте смицајне силе у правцу y - осе. Моменти M_{Rr} и M_{Rl} означавају моменте отпора заокрету возила за десну и леву гусеницу, док силе F_{Rr} и F_{Rl} представљају силе отпора кретања гусеница са обе стране. Применом једначина (23) - (30), смицајне силе:

$$F_{xr} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c + p_r \tan\phi)\left(1 - e^{-\frac{j_r}{K}}\right) b\cos(\gamma_r + \pi) dx, \tag{31}$$

$$F_{xl} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c + p_l \tan\phi)\left(1 - e^{-\frac{j_l}{K}}\right) b\cos(\gamma_l + \pi) dx, \tag{32}$$

$$F_{yr} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c + p_r \tan\phi)\left(1 - e^{-\frac{j_r}{K}}\right) b\sin(\gamma_r + \pi) dx \text{ и} \tag{33}$$

$$F_{yl} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c + p_l tan\phi)\left(1 - e^{-\frac{j_l}{K}}\right) bsin(\gamma_l + \pi)dx, \tag{34}$$

које делују на гусенице у x − и y − правцу рачунају се интеграцијом смицајног напона τ на површини контакта подлоге и гусеница. Ширина гусенице b сматра се константном, док се интеграција врши дуж дужине гусенице, од $-L/2$ до $L/2$. Силе отпора пута F_{Rr} и F_{Rl} десне и леве гусенице могу се изразити као производ коефицијента отпора пута и тежине која делује на гусеницу:

$$F_{Rr} = f\left(\frac{mg}{2} + \frac{ma_y h}{B}\right) \text{ и} \tag{35}$$

$$F_{Rl} = f\left(\frac{mg}{2} - \frac{ma_y h}{B}\right), \tag{36}$$

где је:

- f - коефицијент отпора пута.

Карактеристично за отпор пута за гусенична возила је да је он заправо збир отпора премотавања гусеница, отпора који потиче од сабијања подлоге и отпора услед истискивања тла испред гусенице. За рачунање ових отпора развијени су сложени математички модели, који се једним делом заснивају на Бекеровом моделу притиска и деформације подлоге, и захтевају интеграцију и рачунање рада који је утрошен на деформисање тла, како би се након тога израчунале силе које су последица укупног отпора пута [93]. Са друге стране, развијени су и упрошћени математички модели који се заснивају на експерименталним испитивањима, и њихова поузданост је верификована у пракси [94]. Математички модел који је коришћен у раду за описивање отпора пута представљен је следећом једначином:

$$f = f_t + f_g, \tag{37}$$

где су:

- f_t - коефицијент отпора подлоге и
- f_g - коефицијент отпора гусенице.

Слично претходном, моменти отпора заокрета возила M_{Rr} и M_{Rl} за десну и леву гусеницу могу се изразити као производ сила које делују на возило у правцу y - осе и растојања x од центра масе возила:

$$M_{Rr} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c + p_r tan\phi)\left(1 - e^{-\frac{j_r}{K}}\right) bsin(\gamma_r + \pi)xdx \text{ и} \tag{38}$$

$$M_{Rl} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c + p_l tan\phi)\left(1 - e^{-\frac{j_l}{K}}\right) bsin(\gamma_l + \pi)xdx. \tag{39}$$

4.1.6. Одређивање динамичких параметара кретања

Кретање гусеничног возила у координатном систему описано је коришћењем Њутнових једначина кретања:

$$ma_x = -F_{xr} + F_{xl} - F_{Rr} - F_{Rl}, \tag{40}$$

$$ma_y = F_{yr} + F_{yl} \text{ и} \tag{41}$$

$$I_z\ddot{\theta} = \frac{B}{2}(F_{xr} + F_{xl}) + \frac{B}{2}(F_{Rr} - F_{Rl}) - M_{Rr} - M_{Rl}, \tag{42}$$

где је:

- I_z - момент инерције возила за z - осу.

Комбинацијом једначина (11), (12) и (40) - (42), одређена су убрзања $\dot{v_x}$, $\dot{v_y}$ у правцу x − и y - осе и угаоно убрзање закретања $\ddot{\theta}$ гусеничног возила око z - осе:

$$\dot{v_x} = \frac{(-F_{xr} + F_{xl} - F_{Rr} - F_{Rl})}{m} - v_y\dot{\theta}, \tag{43}$$

$$\dot{v_y} = \frac{(F_{yr} + F_{yl})}{m} + v_x\dot{\theta} \text{ и} \tag{44}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{B}{2}(F_{xr} + F_{xl}) + \frac{B}{2}(F_{Rr} - F_{Rl}) - M_{Rr} - M_{Rl}}{I_z}. \tag{45}$$

4.2. Симулациони модел кретања возила

У претходном поглављу представљен је математички модел чија решења дају информације о силама које се јављају у контакту гусенице и подлоге, као и брзину и позицију возила у току времена. За нумеричко решавање сличних математичких проблема развијени су бројни софтверски алати. За имплементацију и нумеричко решавање изведеног математичког модела одабрано је софтверско окружење MATLAB/Simulink, због

могућности ефикасне имплементације нелинеарних динамичких система, јасне структуралне организације модела, као и једноставне интеграције математичких једначина са симулационим блоковима. Софтверски пакет MATLAB има широку примену у области моделирања, што потврђује велики број научних радова у којима је коришћен за моделовање и анализу динамике сложених механичких система [41,95–97].

Програмски пакет MATLAB представља софтверско окружење, а уједно и програмски језик који се користи за многобројне нумеричке прорачуне, симулације, обраде података и машинско учење [98]. У току свог развоја који и даље траје, проширен је великим бројем алата који га истичу у први план. Оно што га чини посебним јесте чињеница да је синтакса програмског језика MATLAB доста једноставнија у поређењу са C++ или Python. Поред могућности нумеричког решавања математичких проблема, софтверски пакет MATLAB располаже развијеним алатима за обраду, анализу и визуализацију резултата. Посебно се издваја Simulink, интегрисано окружење за графичко моделовање и симулацију динамичких система, које је широко прихваћено у научноистраживачкој и инжењерској пракси.

Simulink је алат који представља графичко окружење за моделирање, симулацију и анализу различитих система [99]. Уместо писања кода, у Simulink-у се модел формира повлачењем и повезивањем блокова (енгл. drag-and-drop) који се налазе у библиотеци, што га чини изузетно интуитивним за примену [100,101]. Библиотека је опремљена великим бројем готових блокова, за различите области истраживања. За анализу механичких система постоје различити блокови мењачких преносника, ослањања и слично. За овакве блокове, треба дефинисати потребне параметре. Такође, Simulink је предвидео и могућност да корисник моделира посебне блокове, из разлога непостојања блокова за све могуће ситуације моделирања.

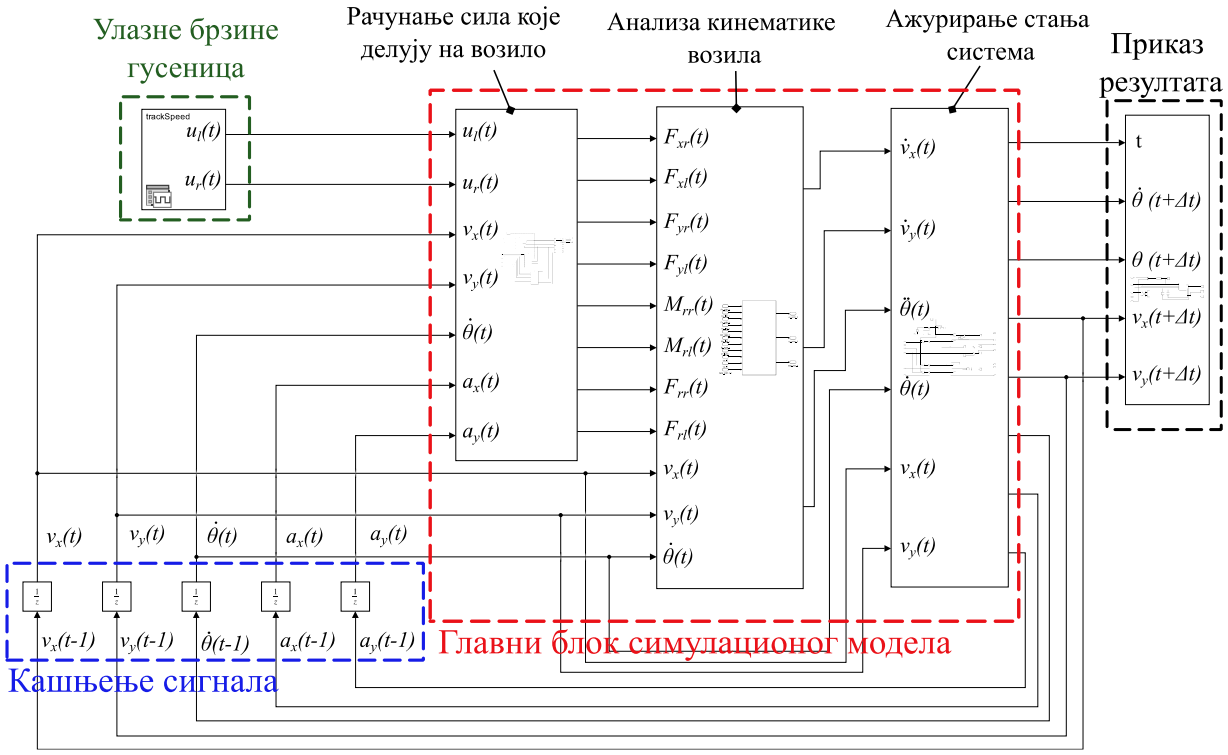
У оквиру овог истраживања, Simulink је коришћен за развој модуларног симулационог модела који омогућава јединствено разматрање праволинијског кретања и заокрета гусеничног возила, уз експлицитно узимање у обзир смицајних деформација подлоге. Развијени модел омогућава анализу утицаја параметара терена и погонских услова на силе у контакту гусенице и подлоге, као и на трајекторију кретања возила.

Још једна важна одлика Simulink-а је његова употреба у развоју алгоритама за аутоматско управљање. Simulink је веома погодан за тестирање и развој како класичних, тако и сложених алгоритама управљања [102–104]. Примери употребе Simulink-а за развој напредних алгоритама управљања дати су у [4,105]. Simulink омогућава управљање

сложеним системима током симулација реализованих у другим програмским окружењима. Пример такве косимулације дата је у истраживању [15], где је Simulink коришћен за развој алгоритма управљања аутономним возилом, а сама динамика кретања возила и избегавање препреке је моделирано у софтверском пакету ADAMS Car.

Због свега наведеног, програмски пакет MATLAB, односно алат Simulink, одабран је за имплементацију претходно приказаног математичког модела интеракције гусеничног возила са подлогом. Сама имплементација математичког модела у Simulink подељена је у више целина. Основни циљ који је постављен је да симулациони модел као излазна решења даје вредности сила у контакту гусеница и подлоге. Добијене вредности сила искоришћене су за рачунање динамике кретања возила, односно, применом Њутнових закона кретања, израчуната је позиција возила у координатном систему у току времена.

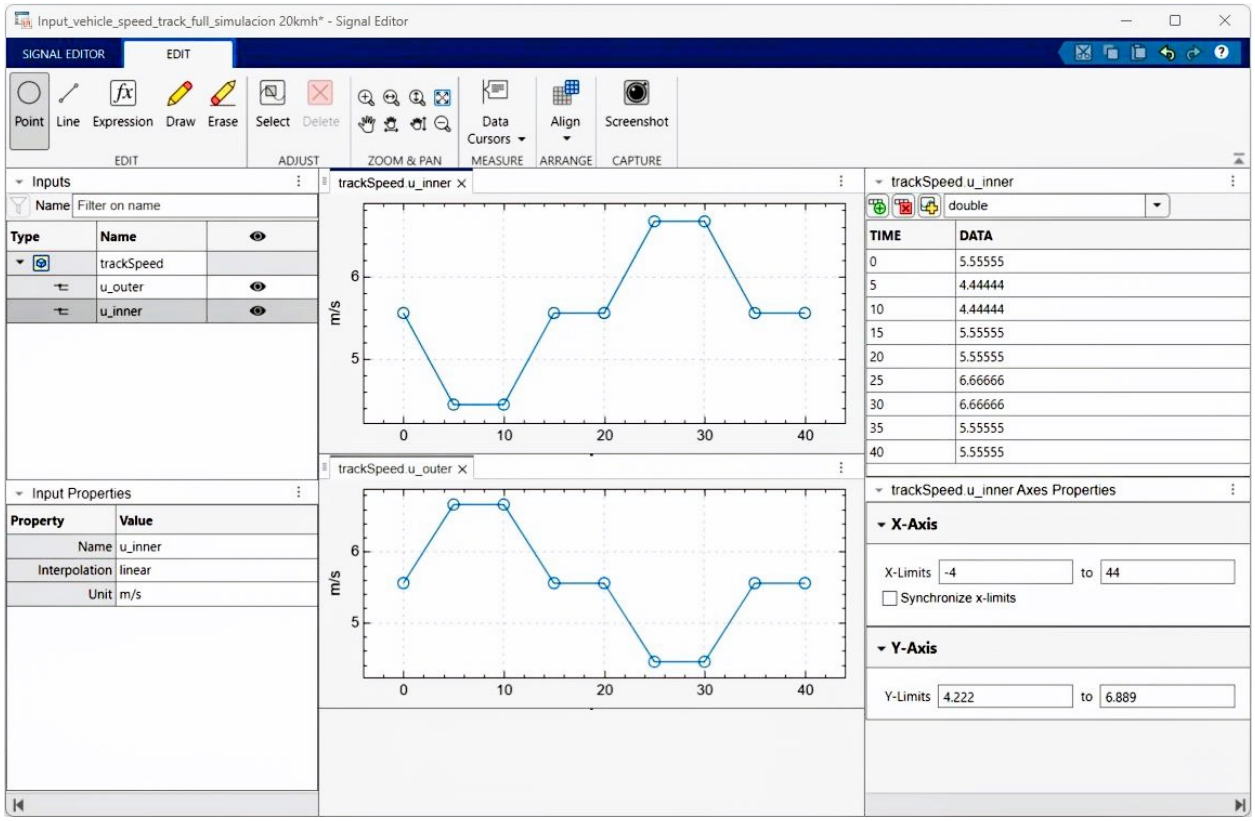
Симулациони модел динамике кретања брзоходног гусеничног возила развијен је у софтверском окружењу MATLAB/Simulink. Модел је развијен на основу претходно изведених једначина које описују динамику контакта гусенице и подлоге. Најважнији део симулационог модела означен је црвеном бојом на слици 4.5, и састоји се од три међусобно повезана дела.



Слика 4.5. Симулациони модел.

4.2.1. Улазне брзине гусеница

Вредности улазних брзина гусеница, односно брзине премотавања гусеница могу се дефинисати на више начина у току симулације. Заједничко за све начине је то да вредности брзина морају бити у временском запису. Први и основни начин је коришћење блока за генерисање сигнала. Овај блок омогућава генерисање временских сигнала и креирање целог сценарија у коме се може креирати више сигнала који зависе од времена. На слици 4.6 приказан је изглед прозора за генерисање временски зависних сигнала. На десној страни прозора уочавају се две колоне за унос података. Прва колона се односи на време, док се у другој уписују вредности жељеног сигнала, у овом случају брзине премотавања гусеница. Вредности се уносе директним путем, са коначним бројем поља, и у овом случају разлика у времену између две унете вредности брзина износи пет секунди. Како се симулације извршавају са значајно мањим временским кораком, генератор сигнала врши нумеричку интерполацију дискретно доступних података ради одређивања вредности сигнала у произвољном временском тренутку.



Слика 4.6. Изглед генератора сигнала у MATLAB/Simulink.

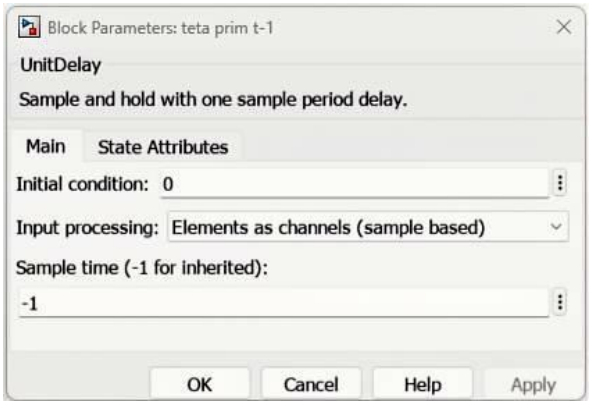
На приказаном прозору блока уочавају се графички прикази промене унетих вредности брзина премотавања гусеница у зависности од времена. Такође, могу се уочити и бројни алати који се користе за обраду и визуализацију генерисаних сигнала. Додатна опција коју

пружа овај блок је та да се могу увести и сигнали који су генерисани на други начин, у другим програмским пакетима или снимљени током експерименталних мерења. Наведена опција за увоз података искоришћена је за валидацију симулационог модела, о чему ће бити више детаља у наредном поглављу.

Други начин за унос вредности брзина премотавања гусеница је директно из радног простора (енгл. Workspace) где се чувају промењљиве у току извршавања симулације. За ово је потребно претходно учитати вредности брзина у радни простор, употребом функције за увоз података директно у MATLAB. На овај начин омогућена је симулација реалних маневарских сценарија, као и директно поређење симулационих резултата са експериментално измереним подацима, што представља основу за валидацију развијеног модела.

4.2.2. Кашњење сигнала

Овај сет блокова је намењен да обезбеди почетне параметре система. С обзиром да се излази из симулације враћају на улаз симулације, а имајући у виду да на почетку симулације не постоје излазне вредности, коришћењем блока Unit Delay омогућен је правилан рад симулације (слика 4.7).



Слика 4.7. Приказ блока Unit Delay.

Заправо, блок Unit Delay уводи кашњење сигнала тако што корисник дефинише почетну вредност за прву итерацију симулације, а вредност промењљиве у наредним итерацијама једнака је вредности из претходне итерације, односно може се исказати на следећи начин:

$$y[t] = u[t-1] \tag{46}$$

где је:

- $y[t]$ - вредност излазног сигнала Unit Delay и
- $u[t-1]$ - вредност улазног сигнала Unit Delay.

Примена блока Unit Delay омогућава дискретну временску интеграцију система, и спречава појаву алгебарских петљи, чиме се обезбеђује нумеричка стабилност симулације. Ако улаз у блок Unit Delay има вредност $u[t]$, тада излаз из блока Unit Delay има вредност $u[t-1]$.

4.2.3. Главни блок симулационог модела

Главни блок симулационог модела интеракције гусеница и подлоге, као и динамике кретања гусеничног возила, састоји се из три целине. Прва целина израчунава кинематичке параметре возила и силе које делују на гусенично возило у функцији смицајног помераја. Користећи улазне параметре, овај део симулационог модела одређује силе и моменте који делују на возило током кретања, у складу са једначинама (15) - (39). Као што је наведено, вредности сила и момената зависе од помераја услед смицања тла, дефинисаног једначином (4).

Друга целина модела решава диференцијалне једначине кретања возила на основу израчунатих сила, израчунавајући убрзања a_x и a_y, као и угаоно убрзање закретања $\ddot{\theta}$. Решавањем ових једначина, модел одређује убрзања дуж x – и y - осе, као и угаоно убрзање око z - осе, у складу са једначинама (40) - (45).

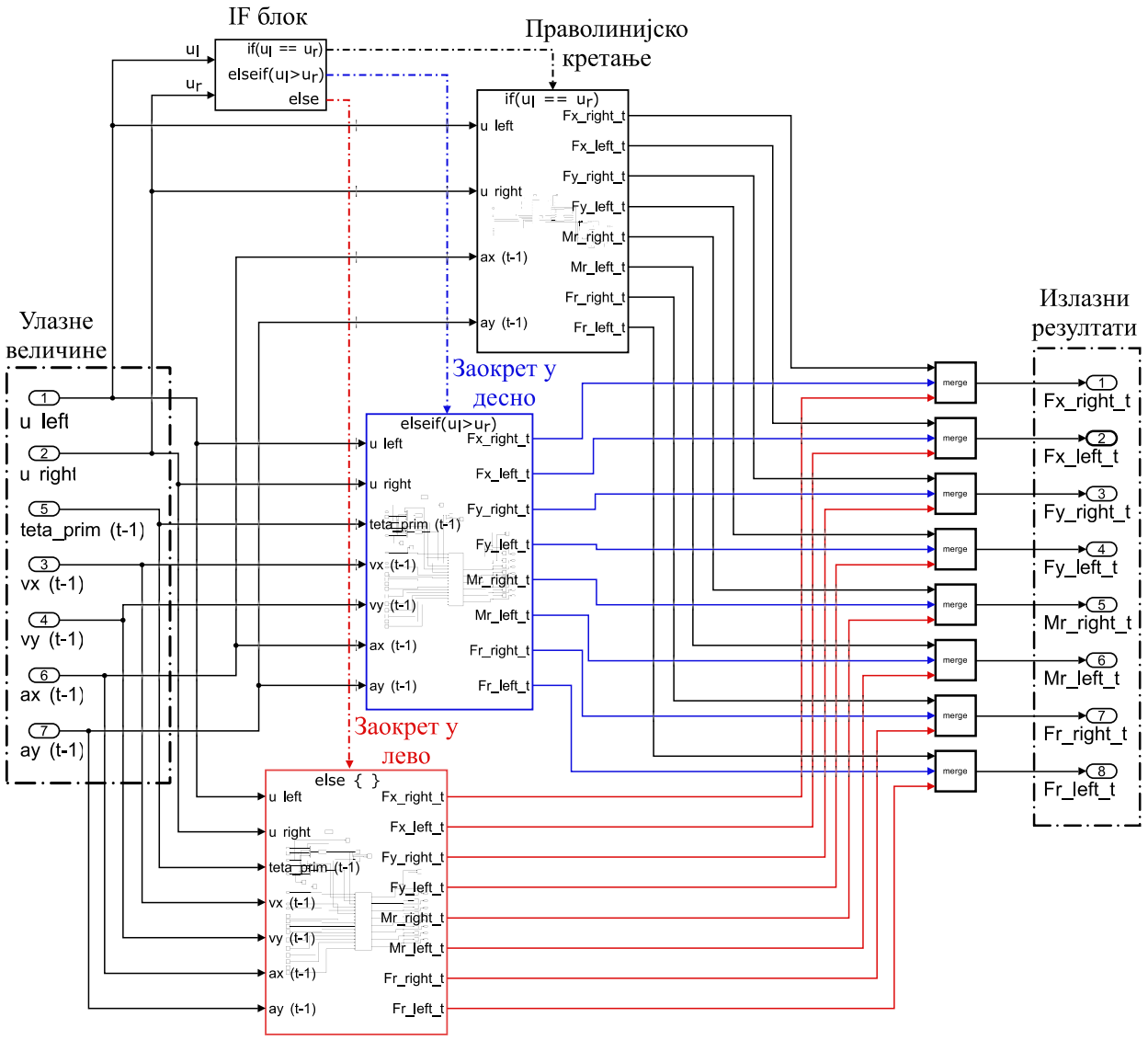
Трећа, и последња целина главног блока симулационог модела, израчунава транслаторне брзине и положај гусеничног возила у глобалном координатном систему XOY, на основу једначина (10) - (14). Брзина возила v добија се као резултанта уздужне и бочне компоненте брзина v_x и v_y, као што је приказано у једначини (10). Оваква подела главног симулационог блока омогућава јасно раздвајање физичких процеса унутар модела, као и једноставно проширење симулације у случају увођења додатних степени слободе или сложенијих закона интеракције.

4.2.3.1. Израчунавање сила које делују на возило

У поглављу 4.1 приказан је математички модел који описује дејство сила на гусенично возило у току десног заокрета. Приказан математички модел искоришћен је и за развој подблока у симулацији за рачунање сила које делују на возило, и представљен је плавом бојом на слици 4.8.

Како би симулациони модел могао да анализира и заокрет возила у леву страну, слично као у поглављу 4.1, развијен је математички модел који описује дејство сила на гусенично возило и у току заокрета у лево (црвена боја). Такође, да би се могло анализирати и

праволинијско кретање, развијен је подблок који рачуна силе које делују на возило у току праволинијског кретања, а који је обележен црном бојом.



Слика 4.8. Блок за рачунање сила које делују на возило.

За прорачун сила које делују на возило у току праволинијског кретања усвојено је да су брзине премотавања леве и десне гусенице апсолутно једнаке. У том случају неће постојати моменти отпора заокрету на десној и левој гусеници представљени једначинама (38) и (39), односно, важиће да је $M_{Rr} = 0$ и $M_{Rl} = 0$. Према томе, на возило, односно десну и леву гусеницу, деловаће отпор пута представљен једначинама (35) и (36). Поред тога, на возило ће деловати и отпори убрзања услед убрзања a_x и a_y. Тако да силе које делују на возило у току праволинијског кретања износе:

$$F_{xr} = \frac{ma_x}{2} + f\left(\frac{mg}{2} + \frac{ma_y h}{B}\right), \tag{47}$$

$$F_{xl} = \frac{ma_x}{2} + f\left(\frac{mg}{2} - \frac{ma_y h}{B}\right), \tag{48}$$

$$F_{yr} = \frac{ma_y}{2} \text{ и} \tag{49}$$

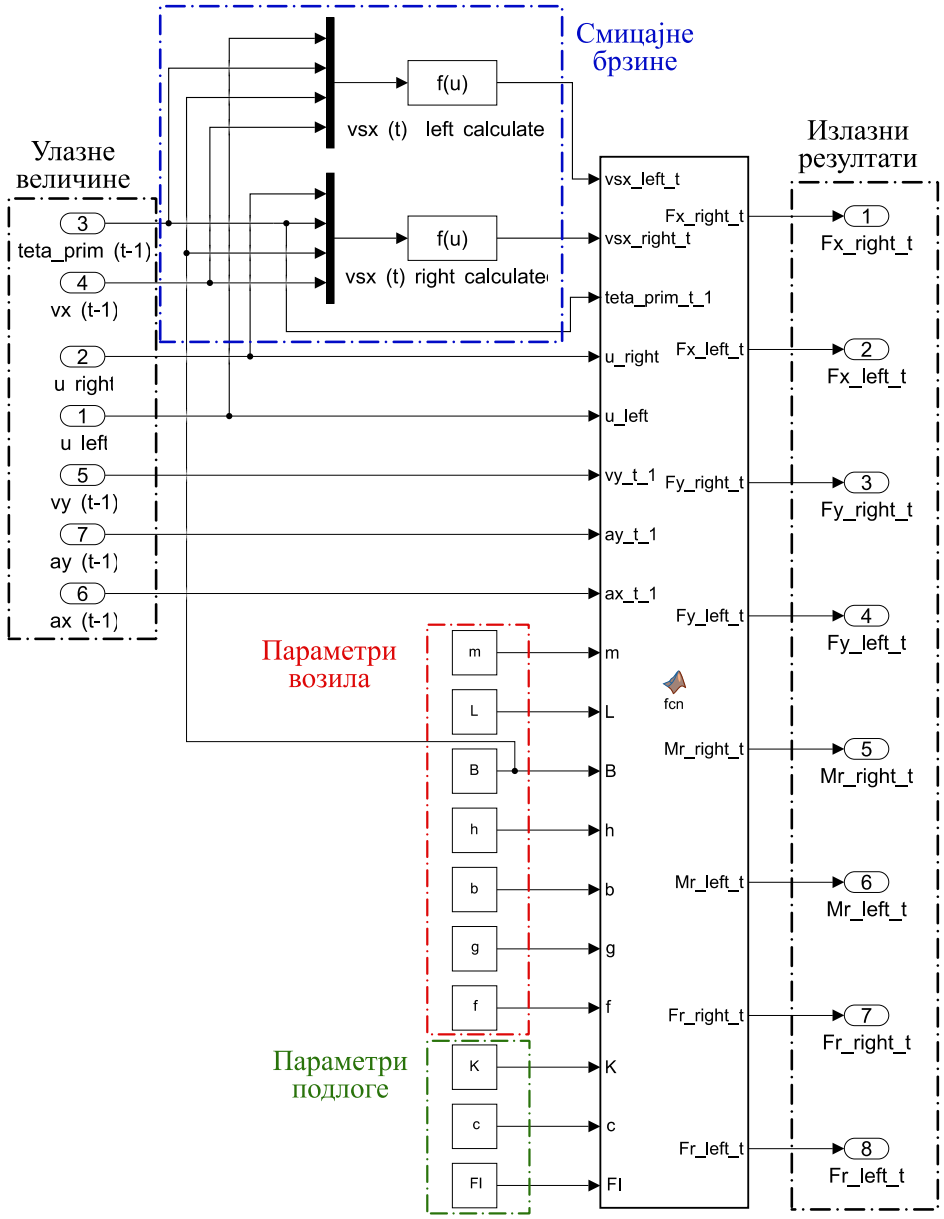
$$F_{yl} = \frac{ma_y}{2}. \tag{50}$$

Који подблок ће се извршавати, односно да ли ће се рачунати дејство сила на возило у току праволинијског кретања или у току заокрета, одлучује IF блок. Улази у IF блок су брзине премотавања леве (u_l) и десне (u_r) гусенице, и у зависности од услова, блок шаље информацију који подблок ће се извршавати у свакој итерацији симулације. Уколико су брзине гусеница једнаке, извршаваће се подблок за праволинијско кретање возила. У случају да је брзина леве гусенице већа од десне, извршаваће се подблок за десни заокрет, и обрнуто у последњем случају. На крају сваке итерације симулације, израчунате вредности сила из наведених подблокова се помоћу блока Merge спајају у један сигнал и прослеђују у следећи блок симулације. На овај начин избегнута је потреба за паралелним извршавањем више модела, чиме се смањује рачунарска сложеност и повећава ефикасност симулације.

Поред наведених отпора убрзања, у току заокрета јавља се и отпор заокрета који представља велики изазов за математичко моделирање. У развијеном симулационом моделу искоришћен је математички модел који је представљен у поглављу 4.1 и који се заснива на теорији смицајних напона. Већ је наведено да у Simulink-у не постоје унапред направљени блокови за све сценарије, већ да је остављена могућност да се развијају специфичне функције унутар блока предвиђеног за то. Блок који омогућава наведено, и који је коришћен за моделирање сила у контакту гусеница и подлоге, је блок MATLAB Function. Наведени блок омогућава да се унутар њега унесе код који се извршава унутар симулације у свакој итерацији. Он представља везу између моделирања помоћу блокова и текстуалног програмирања. На овај начин рачунају се силе и моменти који делују на возило у току заокрета.

Непосредно пре израчунавања наведених сила, модел израчунава претходно дефинисане брзине смицања. Део симулационог модела који израчунава наведене брзине уоквирен је испрекиданим плавим правоугаоником на слици 4.9. За израчунавање ових сила

искоришћен је блок Fcn који може да користи основне математичке операције. Математички модел за рачунање смицајних брзина дат је једначинама (15) - (18). У симулационом моделу, у подблоку приказаном на слици 4.9, потребне вредности за рачунање смицајних брзина се претходно слажу у вектор, и као такве улазе у блок Fcn, одвојено за леву и десну гусеницу. У самом блоку се рачуна смицајна брзина за сваку гусеницу, и те вредности се прослеђују до блока MATLAB Function где се рачунају саме силе и моменти који делују на возило.



Слика 4.9. Подблок за рачунање сила које делују на гусенично возило у току заокрета.

Овде је потребно нагласити да се у сваком кораку симулације учитавају вредности промењљивих које су израчунате у претходној итерацији, и обележене су са „Улазне величине" на слици 4.9. У овом подблоку, а за потребе рачунања сила и момента који делују на возило у току заокрета, користе се и константни параметри који се односе на геометријске

карактеристике возила и карактеристике подлоге описане у претходном поглављу. Параметри који описују геометријске карактеристике возила у највећој мери се добијају експерименталним путем, и често се могу пронаћи у техничкој документацији возила. Слично претходном, параметри који се односе на терен (земљиште) одређују се стандардизованим експерименталним тестовима, те за сваку врсту терена постоје прецизно одређене вредности параметара које га описују [106,107].

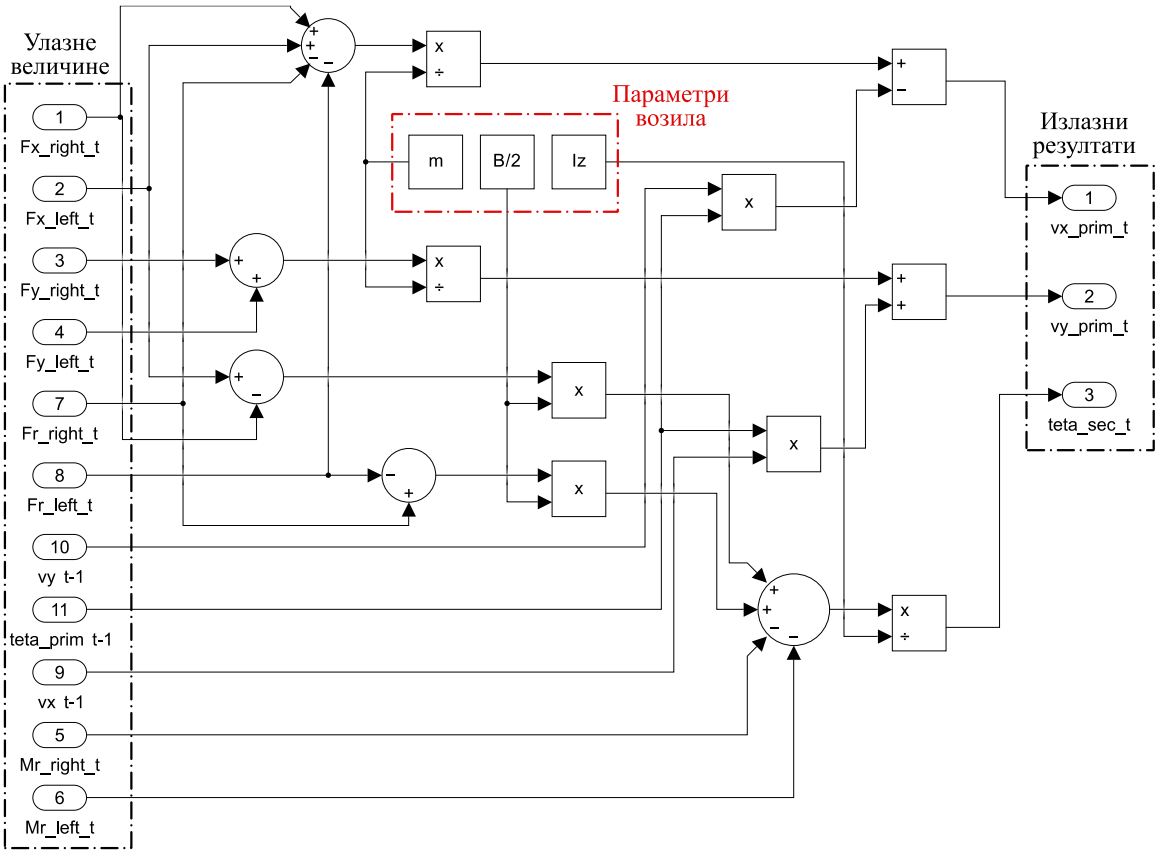
Учитавање параметара врши се директно из радног простора Workspace коришћењем блока Constant за сваки параметар. Блокови Constant за учитавање наведених параметара обележени су црвеним и зеленим испрекиданим правоугаоницима на слици 4.9. Да би Simulink модел током симулације имао приступ свим неопходним параметрима, њихове вредности се претходно учитавају у MATLAB Workspace, који представља радни простор MATLAB окружења у коме се чувају променљиве и објекти који су доступни функцијама, скриптама и Simulink моделима током извршавања. Учитавање параметара реализовано је извршавањем MATLAB скрипте у којој су дефинисане вредности свих параметара потребних за симулацију.

И на крају, израчунате вредности у блоку MATLAB Function прослеђују се следећем блоку симулације. Прослеђивање вредности израчунатих сила и момента обележени су са „Излазни резултати” на слици 4.9.

4.2.3.2. Анализа кинематике возила

Блок за анализу кинематике возила намењен је да рачуна кинематичке параметре возила, односно убрзања возила дуж x - и y - осе, као и угаоно убрзање $\ddot{\theta}$. Ови параметри одређени су на основу претходно израчунатих вредности сила и момента који делују на возило у току заокрета. Вредности параметара се учитавају у свакој итерацији симулације, а добијају се решавањем претходног блока, где представљају излаз. На тај начин остварује се веза између блока за анализу кинематике возила и блока за рачунање сила које делују на возило.

Такође, након решавања овог блока у току симулације, добијене вредности убрзања прослеђују се у наредни блок симулације. Једначине (43) - (45) коришћене су за развој овог блока који је приказан на слици 4.10. Слично претходном, и за моделирање овог блока искоришћени су Constant блокови за учитавање параметара који се односе на геометријске карактеристике возила, и то маса, ширина трага гусеница и момент инерције возила, и исти су обележени црвеним правоугаоником на слици 4.10, означени са „Параметри возила”.



Слика 4.10. Блок за анализу кинематике возила.

За моделирање блока за анализу кинематике возила коришћени су блокови који представљају основне математичке операције сабирања, множења и дељења. За имплементацију једначина (43) - (45) нису коришћене кориснички дефинисане MATLAB функције, већ стандардни Simulink блокови. Будући да сваки блок реализује једну математичку операцију, структура симулационог модела непосредно прати структуру једначина, чиме је обезбеђена већа прегледност модела и једноставнија провера исправности његове имплементације.

4.2.3.3. Ажурирање стања система

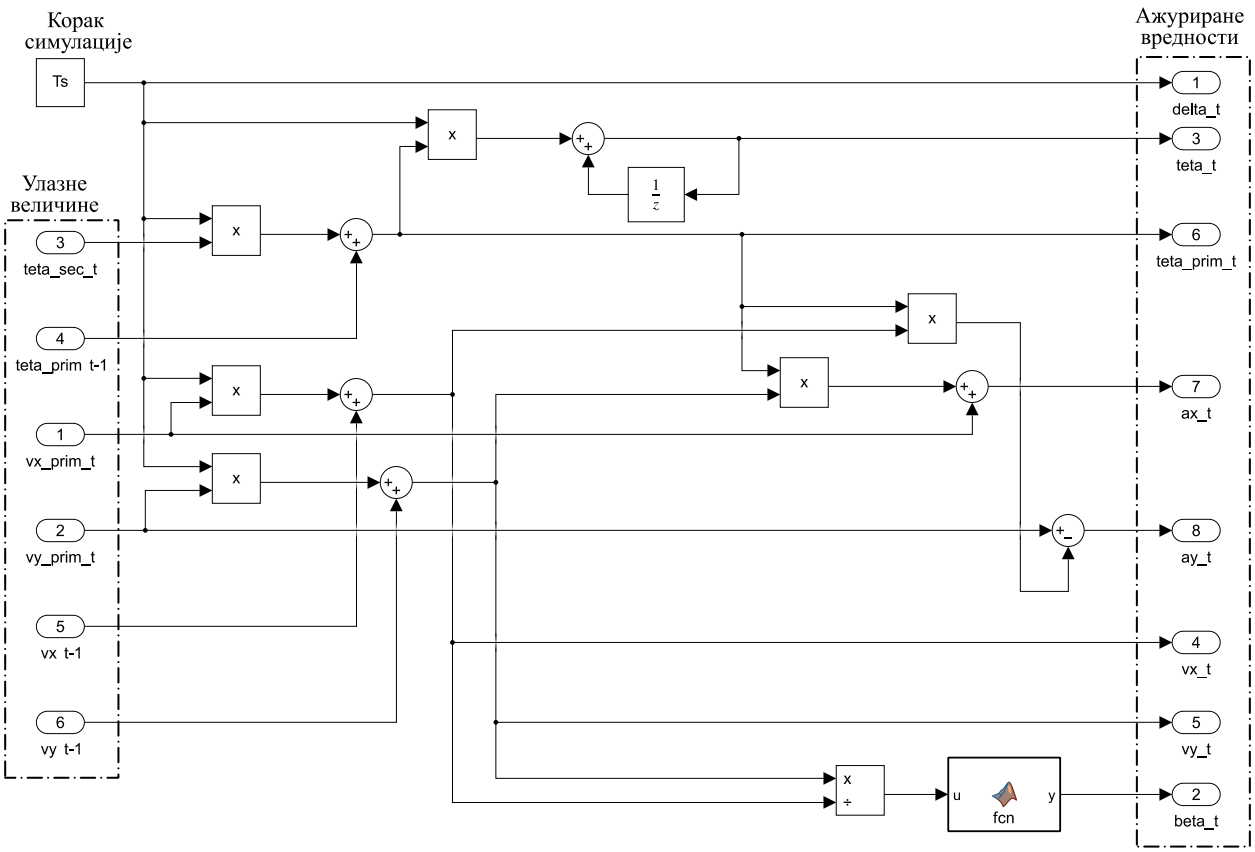
Блок за ажурирање стања система приказан је на слици 4.11, и описан је следећим једначинама:

$$v_x(t+\Delta t) = v_x(t) + \dot{v}_x(t)\cdot\Delta t, \tag{51}$$

$$v_y(t+\Delta t) = v_y(t) + \dot{v}_y(t)\cdot\Delta t, \tag{52}$$

$$\dot{\theta}(t+\Delta t) = \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)\cdot\Delta t \text{ и} \tag{53}$$

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \dot{\theta}(t) \cdot \Delta t. \tag{54}$$



Слика 4.11. Блок за ажурирање стања система.

Намењен је да у сваком кораку симулације изврши ажурирање свих потребних параметара, као и да позиционира возило у координатном систему XOY. Убрзања a_x, a_y и $\ddot{\theta}$ се израчунавају у блоку за анализу кинематике возила и улазе у блок за ажурирање стања система заједно са тренутним вредностима брзине, где се тренутне брзине израчунавају применом дискретног интеграционог поступка са фиксним временским кораком симулације.

Временски корак симулације $\Delta t = 0.02\,\mathrm{s}$ одабран је тако да обезбеди стабилност дискретне интеграције и довољну временску резолуцију за праћење брзих промена сила у контакту гусенице и подлоге. Вредност корака симулације одређена је на основу пробних симулација, при чему је утврђено да даље смањење Δt не доводи до значајних промена у резултатима.

Ажуриране брзине се затим користе за израчунавање положаја, интеграцијом једначина кретања у времену, у складу са једначинама (13) и (14). Положај возила одређен је координатама X и Y у координатном систему XOY. Излаз овог блока састоји се од

ажурираних величина, које се затим враћају у модел за наредни корак симулације, где представљају почетне вредности новог корака симулације. Слично претходном блоку, и у овом су коришћени готови блокови који описују основне математичке операције. За разлику од претходног, у овом блоку је дефинисан и корак симулације, позивањем константне променљиве Ts из радног простора Workspace.

4.2.4. Блок за приказ резултата

Симулациони модел такође укључује и блок за обраду и визуализацију резултата (крајње десни блок на слици 4.5), у оквиру ког је коришћен блок за визуализацију под именом Scope. Блок омогућава праћење кључних параметара у реалном времену као што су брзине, убрзања и силе. Такође, ради праћења правилног рада симулације, у оквиру блока за приказ резултата развијен је модел за приказ трајекторије кретања гусеничног возила без клизања, израчунат на основу угаоних брзина погонских точкова. Наведени модел заснива се на кинематским једначинама кретања гусеничног возила приказаним у [108]. Добијене идеалне трајекторије без клизања упоређене су са стварним трајекторијама возила добијеним решавањем диференцијалних једначина кретања које узимају у обзир клизање возила и које су имплементиране у приказани симулациони модел.

4.2.5. Дефинисање параметара возила и терена

Како је већ наведено, симулациони модел садржи параметре који се односе на геометријске карактеристике гусеничног возила, као и на коефицијенте који ближе описују понашање терена. Одређивање параметара веома је важно за поузданост и прецизност сваке симулације. За потребе развијеног симулационог модела динамике контакта гусенице и терена усвојени су параметри терена који су доступни у објављеним истраживањима. Конкретно, параметри као што су кохезија земљишта, угао унутрашњег отпора на смицање и модул деформације смицајног напона, усвојени су из доступне литературе [78,109,110] у којој су представљена теренска испитивања и лабораторијске анализе различитих врста терена. На овај начин, и применом усвојених математичких модела, обезбеђено је реално представљање понашања тла под оптерећењем гусеница. Вредности параметара земљишта за најчешће типове терена који су коришћени за симулације представљени су у табели 4.1. Изабрани типови терена представљају карактеристичне подлоге по којима се крећу гусенична возила у реалним експлоатационим условима, што омогућава анализу понашања возила у широком опсегу механичких својстава подлоге.

Геометријски параметри одабраног гусеничног возила БВП М80А, као што су маса возила, ширина трага гусеница, димензије чланка гусеница, као и преносни однос у бочном преноснику, преузети су из техничке документације [111,112]. За одређивање момента инерције возила искоришћен је тродимензионални (3D) модел возила приказан на слици 4.12, што је широко прихваћена инжењерска пракса [113].

Табела 4.1. Параметри терена.

Параметар	**Снег**	**Шљунак**	**Мочвара**	**Песак**	**Глина**	**Јединица**
c	6	0	2.8	1.3	68.92	[kPa]
φ	20.7	33	39.4	31.1	34	[°]
K	3.5	2.5	3.1	1.2	0.6	[cm]



Слика 4.12. Тродимензионални модел возила БВП М80А.

Одређивање стварног момента инерције целог возила представља велики инжењерски подухват, нарочито када се ради о борбеним гусеничним возилима која због своје оклопне заштите имају велику масу. Иако постоје експерименталне методе за одређивање момента инерције возила, оне су често немогуће за спровођење. Развој напредних алата за 3D моделирање унапредио је аналитичке методе за одређивање момента инерција сложених система. С обзиром да није постојала могућност да се експерименталним методама одреди момент инерције возила БВП М80А, као и да није пронађена вредност у техничкој документацији, одлучено је да се за одређивање момента инерције искористи постојећи 3D

модел возила. Коначно, усвојени параметри за дефинисање конструкционих карактеристика изабраног возила БВП М80А дати су у табели 4.2.

Табела 4.2. Параметри возила БВП М80А.

Параметар	Вредност	Јединица
m	13 850	[kg]
Iz	42 086	[kgm²]
L	3.3	[m]
B	2.526	[m]
b	0.31	[m]
h	1.139	[m]
r	0.258	[m]
ir	5.786	–

Формирани симулациони модел представља основу за даљу анализу динамике гусеничног возила и омогућава детаљно испитивање утицаја параметара терена и погонских услова на понашање возила. Модуларна структура модела омогућава његово проширење ка сложенијим моделима, као и потенцијалну примену у косимулационим и реално-временским окружењима.

4.3. Експериментална истраживања

У овом поглављу описано је експериментално мерење које је спроведено ради валидације развијеног и приказаног симулационог модела интеракције гусеница и подлоге. Анализа и дискусија експерименталних резултата, као и њихово поређење са резултатима симулација, разматрани су у наредним поглављима дисертације.

Развој напредних програмских пакета, као што је MATLAB, омогућио је интензиван развој симулација, чији је циљ добијање поузданих резултата који се могу искористити за детаљну анализу понашања сложених система. При развоју оваквих симулација неопходно је бити обазрив, имајући у виду сложеност самих система, јер и најмањи недостаци у моделу могу довести истраживаче и инжењере у „заблуду", што може резултирати погрешним закључцима. При развоју симулационих модела потребно је јасно уочити њихова ограничења и разумети утицај тих ограничења на добијене резултате. Због наведеног, постизање компромиса између сложености модела и његове применљивости, представља неизбежан аспект симулација сложених система. Упркос значајном напретку симулационих алата, експериментална истраживања и даље остају најважнији метод за проверу поузданости и тачности симулационих модела.

Супротно ниској цени развоја симулационих модела, експериментална истраживања су временски дуга, технички сложена, нарочито у случају сложених борбених система, захтевају добру припрему и скупоцену мерну опрему. Због свега наведеног, долази се до јасног разумевања зашто не постоји велики број истраживања чији модели су потврђени кроз експериментална мерења. Већина радова заснива се на теоријској анализи појава и примени напредних програмских решења у развоју симулационих модела.

Ово је нарочито карактеристично када су у питању сложени борбени системи, као што је БВП М80А, као и мерење сила у контакту гусеница и подлоге. Такође, одсуство објављених експерименталних истраживања може се оправдати и чињеницом да се таква истраживања у највећој мери користе за развој гусеничних борбених возила, те да су због наведеног често означени и неким степеном тајности.

У сваком случају, да би се извршила валидација развијеног симулационог модела, спроведена су експериментална мерења ради одређивања интензитета сила отпора у правцу уздужне осе возила током заокрета. С обзиром на сложеност мерења, нису мерене силе које делују у правцу попречне осе возила. Разлог за то налази се у сложеној конструкцији гусеничног кретача и начину формирања и преносу бочних сила. Заправо, морао би се осмислити цео мерни систем који би мерио бочне силе на сваком чланку гусенице, а накнадно би се ти подаци обрађивали, и потом рачунала укупна бочна сила на свакој гусеници. Овде треба имати у виду да се чланци гусеница крећу, што представља велики инжењерски изазов. Мерење бочних сила би захтевало напредну мерну опрему која би драстично повећала потребна новчана средства за спровођење мерења, а упитно је колику би употребну вредност имали добијени подаци [114].

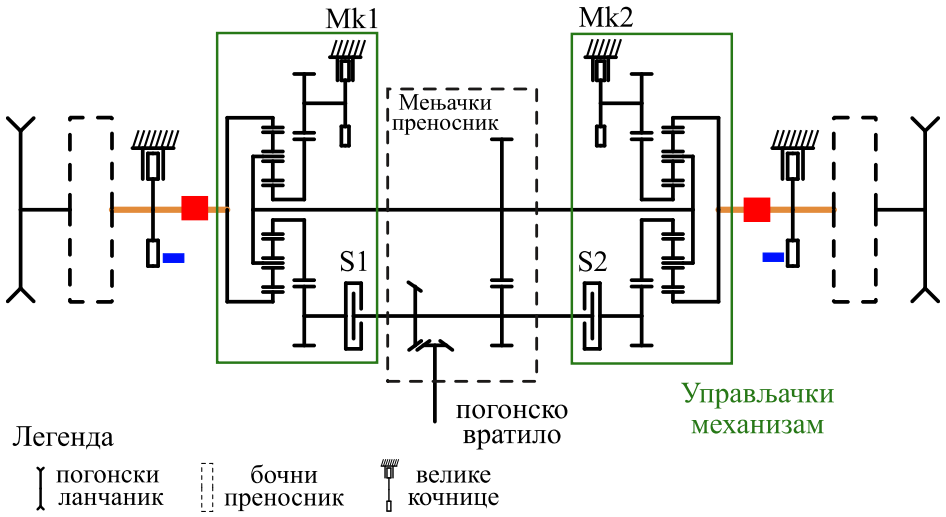
Поред техничких ограничења, потребно је нагласити да предмет овог истраживања није директно одређивање укупних попречних сила на гусеницама, већ валидација симулационог модела интеракције гусенице и терена у домену подужних сила, које имају доминантан утицај на енергетске параметре кретања и оптерећење погонског система. Попречне силе се у развијеном симулационом моделу израчунавају на начин који је описан у претходним поглављима, али њихово директно мерење превазилази оквир и циљеве ове дисертације.

Како је већ наглашено, компромис у реализацији експерименталних мерења, а ради валидације симулационог модела, пронађен је у мерењу сила које се јављају на гусеницама у правцу уздужне осе возила. Слично попречним силама које делују на возило, подужне

силе делују на сваки чланак гусенице, али у овом случају кумулативно се сабирају и преко погонског точка преносе обртни момент до погонског система возила (трансмисије). Ово омогућава да се, постављањем давача на излазна вратила из трансмисије, мере оптерећења која се јављају на самим вратилима у току кретања возила, и да се након тога аналитичким путем прерачунају силе које делују на гусенице у подужном правцу возила. Параметри који су мерени током експерименталних истраживања на возилу БВП М80А су угаоне брзине излазних вратила из трансмисије, смештених непосредно пре бочног преносника, као и обртни моменти који се јављају на излазним вратилима.

4.3.1. Анализа система за пренос снаге возила БВП М80А

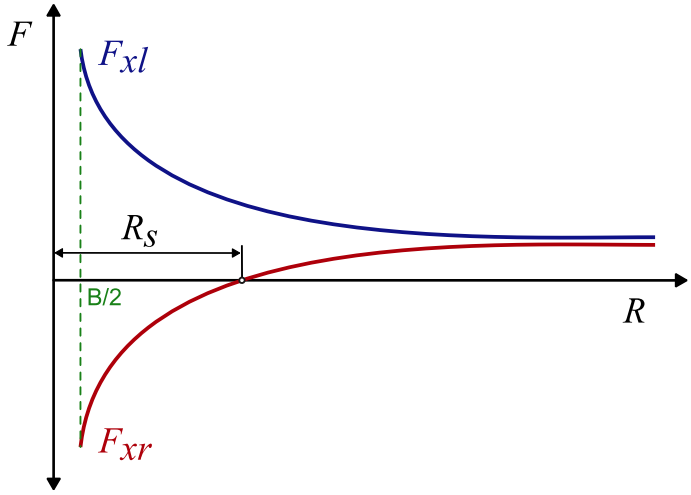
Систем за управљање гусеничног возила БВП М80А припада категорији несиметричних система са механичким једностепеним редуктором у помоћном погону. Праволинијско кретање возила постиже се активирањем обе кочнице обележене са $Mk1$ и $Mk2$ на слици 4.13.



Слика 4.13. Шематски приказ трансмисије возила БВП М80А.

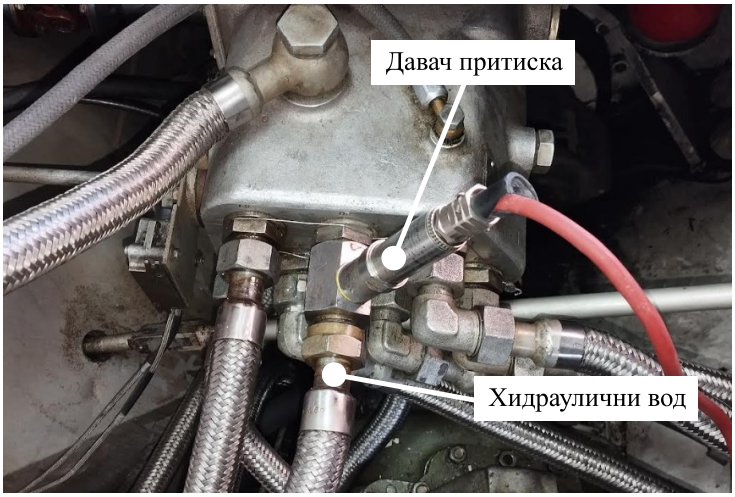
При започињању десног заокрета, долази до пада притиска у чељустима кочнице $Mk2$, чиме се прекида пренос снаге на унутрашњу (десну) гусеницу и омогућава управљање са радијусима заокрета у распону од $R = \infty$ до $R = Rs$. Радијус заокрета Rs остварује се у тренутку када се унутрашња гусеница искључи из погона, омогућавајући јој да се слободно окреће под дејством сила отпора. За остваривање мањих радијуса заокрета, активира се вишеламеласта спојница означена са $S2$ на слици 4.13, чиме се успоставља крута кинематичка веза између унутрашње и спољашње гусенице и омогућава се рекуперација снаге. У том тренутку сила на десној гусеници F_{xr} постаје негативна (кочна), као што је приказано на слици 4.14.

За потпуно активирање вишеламеласте спојнице неопходан је радни притисак у хидрауличком систему управљања од минимум 6 bar. До тренутка достизања наведеног притиска у вишеламеластој спојници, иста преноси обртни момент, уз проклизавање дискова који се налазе у контакту. Услед проклизавања, заокрет возила у овој фази није у потпуности контролисан и предвидљив.



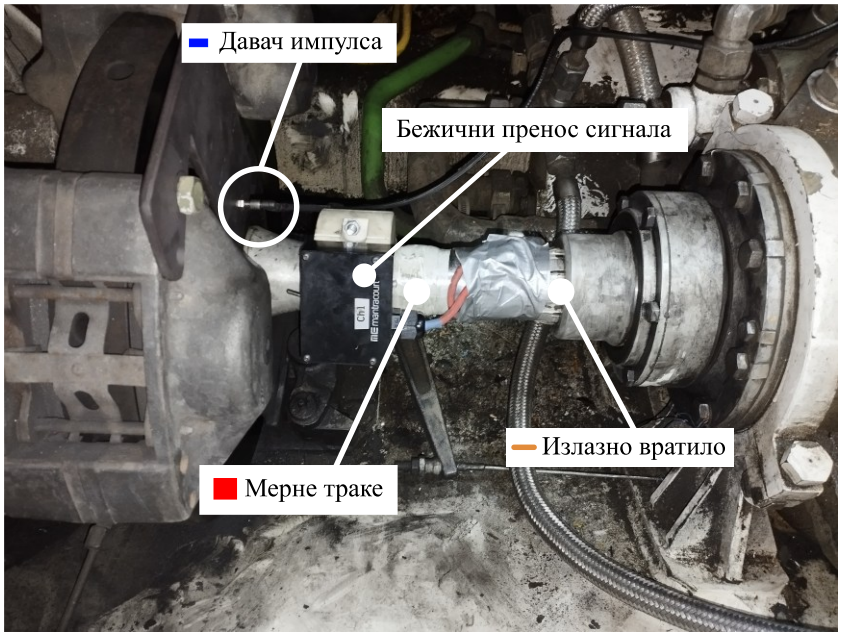
Слика 4.14. Карактер промене сила које делују на леву и десну гусеницу у подужној оси возила у зависности од радијуса заокрета.

Да би се контролисао процес активирања вишеламеласте спојнице у току експерименталних мерења, постављен је давач притиска (слика 4.15) на хидрауличном воду десне вишеламеласте спојнице S2, преко кога је праћен рад спојнице у току мерења. Због наведеног, сва експериментална мерења изведена су током заокрета возила у десно. Тренутак достизања притиска потпуног активирања спојнице од 6 bar представљао је тренутак за покретање мерења обртног момента на излазним вратилима трансмисије и угаоних брзина истих, чиме су створени поновљиви и контролисани услови мерења.



Слика 4.15. Давач притиска у хидрауличном воду вишеламеласте спојнице S2.

Да би се проценила тачност развијеног симулационог модела за израчунавање сила интеракције гусеница и терена, важно је узети у обзир положај давача коришћених у експерименталним мерењима. На слици 4.16, приказана су места на којима су постављени давачи који су коришћени на десној страни возила (излазна вратила из трансмисије). Давачи су идентично постављени и на левој страни возила, као што је приказано на шеми (слика 4.13). Давач импулса је преко носача везан за велику кочницу, док су мерне траке залепљене на излазно вратило из трансмисије.



Слика 4.16. Положаји индуктивног сензора, бежичног преносног модула и мерних трака.

Како представљени математички модел израчунава силе на месту контакта гусеница и терена, потребно је урачунати механичке губитке η_{tl} који настају, а односе се на бочни преносник, погонске точкове и карактеристике гусенице, као што су геометрија зуба, крутост и маса. Исти се могу се описати следећом једначином [108]:

$$\eta_{tl} = 0.95 - 0.018v, \tag{55}$$

где је:

- v - брзина возила.

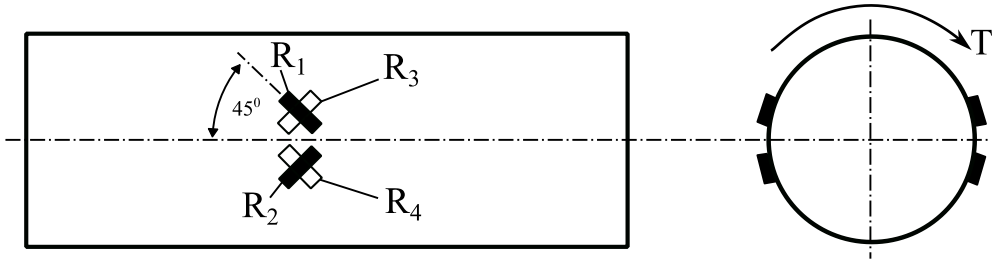
Примењени приступ представља уобичајену инжењерску праксу у анализи гусеничних возила, при чему се силе у контакту гусенице и терена одређују индиректно преко измерених оптерећења на елементима погона. На тај начин омогућено је повезивање експерименталних резултата са симулационим моделом, уз контролисано и јасно дефинисано увођење механичких губитака.

Ова апроксимација често се користи за описивање механичких губитака и може се користити за брзине возила до 50 km/h [111]. Описани метод за урачунавање губитака од места мерења до тачке где се израчунавају силе, не узима у обзир губитке који настају током убрзања возила. С обзиром на познати преносни однос ir у бочном преноснику снаге и радијус r погонских точкова, као и механичке губитке представљене једначином (55), измерене угаоне брзине и обртни моменти могу се прерачунати у брзине премотавања гусеница и силе које делују на гусенице у правцу x - осе возила. Анализа експерименталних података ограничена је на режиме кретања са релативно стабилном брзином, чиме је утицај инерцијалних оптерећења услед убрзања сведен на минимум. На тај начин обезбеђено је да измерене величине буду репрезентативне за стационарне услове кретања, који су од примарног интереса за валидацију развијеног симулационог модела.

4.3.2. Мерење обртног момента на излазним вратилима трансмисије

Мерење обртног момента на излазним вратилима представља велики изазов. За само мерење обртног момента постоје специјални давачи. Међутим, они нису примењиви на конструкцију трансмисије БВП М80А, с обзиром да се мерење врши у покрету возила док се излазна вратила трансмисије окрећу и више стотина обртаја у минути, при чему на трансмисији возила није предвиђена накнадна уградња давача. Због наведеног, за мерење обртног момента коришћене су мерне траке које су залепљене на излазна вратила из трансмисије возила (слика 4.16). Ова метода омогућава индиректно мерење момента применом тензометрије, где је деформација вратила услед торзионог оптерећења у директној вези са примењеним обртним моментом.

Постављање мерних трака за мерење обртног момента врши се пажљивом припремом површине и прецизним позиционирањем трака на вратилу. Површина вратила се најпре механички и хемијски очисти, како би се обезбедило добро пријањање трака и тачан пренос деформације. Мерне траке се лепе на површину вратила под углом од ±45° у односу на уздужну осу, јер је у том правцу деформација услед увијања максимална. Постављају се симетрично, најчешће у паровима супротног знака деформације, како би се омогућило повезивање у пуни Витстонов мост (енгл. Wheatstone bridge). Оваква конфигурација обезбеђује повећану осетљивост мерења, поништавање утицаја савијања и ефикасну температурну компензацију, што је од великог значаја за прецизно мерење обртног момента. На излазним вратилима трансмисије постављене су по две мерне траке за мерење напона увијања („рибља кост") које имају четири активна отпора. Шематски приказ начина постављања наведених мерних трака приказан је на слици 4.17.



Слика 4.17. Приказ начина постављања мерних трака на вратило [115].

У приказаном случају, начин повезивања мерних трака у пун Витстонов мост приказан је на слици 4.18. Укупна дилатација на месту постављених мерних трака, која се јавља услед деловања обртног момента, може се израчунати на следећи начин [115]:

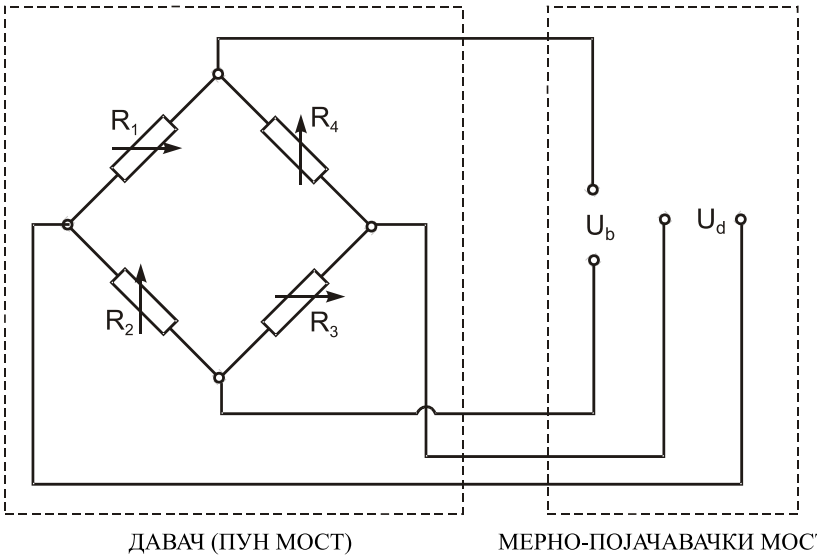
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{K} \cdot \frac{U_d}{U_b}, \tag{56}$$

где су:

- K - карактеристика (К фактор) мерних трака,
- U_d - напон у мерној дијагонали и
- U_b - напон напајања.

Познавањем величине попречног пресека вратила на месту постављања мерних трака, као и познавањем модула клизања материјала, обртни момент који вратило преноси у тренутку мерења може се аналитичким путем израчунати применом отпорности материјала. Имајући у виду да не постоје поуздани подаци о карактеристикама материјала од којих су вратила направљена, као и утицај експлоатације возила на геометријске карактеристике вратила, аналитичка метода може унети велику грешку у анализи обртног момента.

Најбоље резултате у погледу претварања измерених електричних величина које су последица дилатације вратила, односно самих вратила услед оптерећења, даје директно баждарење мерних трака. Заправо, баждарењем се измерени напон услед дилатације директно претвара у обртни момент. Поступак баждарења је релативно једноставан. Вратило се оптерећује на познату вредност момента увијања (који се може и мерити додатним давачем), а на мерном уређају се записују вредности напона U_d у мерној дијагонали мерних трака. На тај начин прави се табела зависности момента увијања и напона U_d.



Слика 4.18. Начин везивања мерних трака у пун Витстонов мост [115].

Постављање поменутих мерних трака на излазна вратила трансмисије и њихово баждарење извршено је у акредитованој лабораторији „TRC PRO" Нови Сад. Применом директног баждарења обезбеђена је висока тачност мерења обртног момента, при чему су систематске грешке сведене на минимум, а поновљивост мерења потврђена у лабораторијским условима. Индиректно одређивање сила у контакту гусеница и подлоге преко измерених оптерећења у погонском систему, представља устаљену и методолошки оправдану праксу у истраживањима гусеничних возила, посебно у случајевима када директно мерење сила није технички изводљиво или би довело до значајног нарушавања реалних услова кретања.

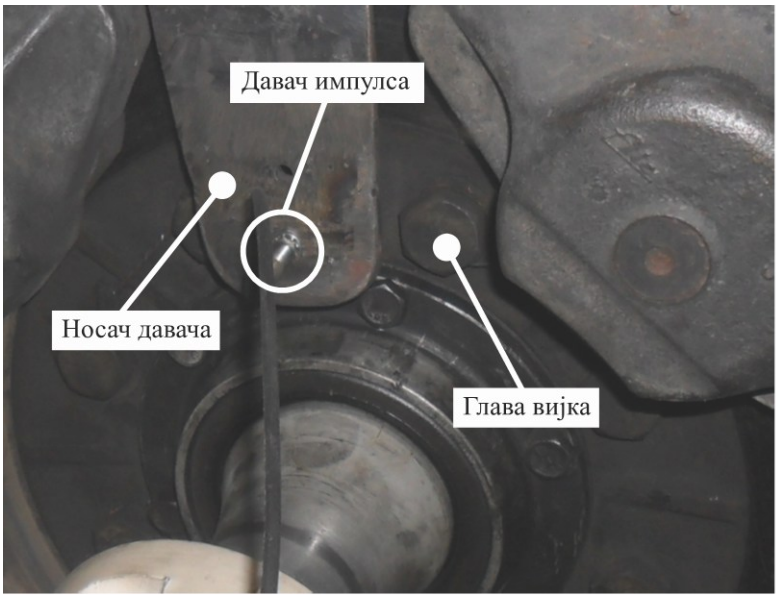
За пренос сигнала од мерних трака до мерно-појачавачког моста коришћен је систем за бежични пренос. На само вратило физички је везан предајник сигнала (слика 4.16) који прима информацију о напону непосредно од мерних трака, и бежичним путем шаље пријемнику. У овом случају, непосредно код мерно-појачавачког моста налази се уређај за бежични пренос сигнала приказан на слици 4.19. Овим је постигнут стабилан пренос сигнала током мерења и при високим бројевима обртаја излазних вратила трансмисије.



Слика 4.19. Уређај за бежични пренос сигнала.

4.3.3. Мерење угаоних брзина излазних вратила трансмисије

За разлику од мерења обртног момента, мерење угаоних брзина представља мањи инжењерски изазов. За ово мерење коришћени су магнетни давачи импулса. За постављање давача импулса направљени су посебни носачи помоћу којих се давач позиционира тачно изнад главе вијка (слика 4.20) који ротира заједно са излазним вратилом из трансмисије. Ротацијом вратила, и релативним померањем главе вијка у односу на давач, долази до промене магнетног поља и самим тим прекида сигнала који преноси давач. На основу ове промене формира се периодични сигнал чију фреквенцију је могуће одредити, а самим тим и угаону брзину вратила.

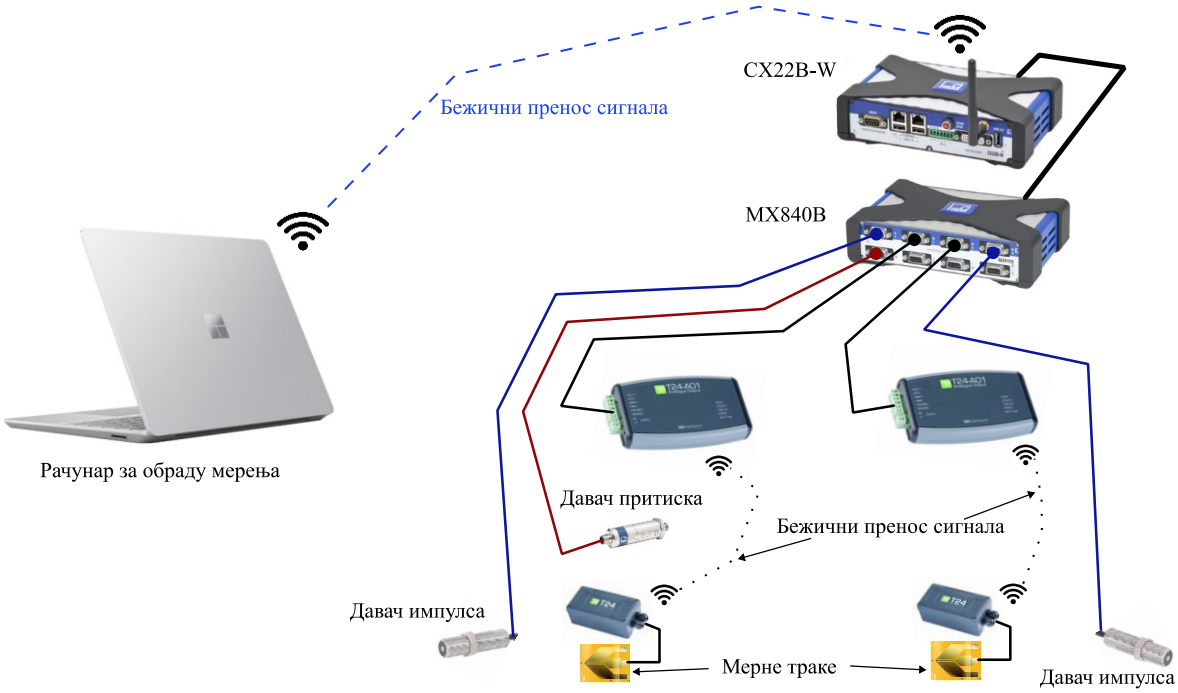


Слика 4.20. Положај давача импулса.

4.3.4. Мерно-појачавачки мост и софтвер за прикупљање података

За прикупљање и обраду мерних података коришћен је мерни мост HBM QuantumX MX840B који омогућава прецизно очитавање сигнала са мерних трака. Уређај је повезан са снимачем сигнала HBM QuantumX CX22B-W који је бежично повезан са рачунаром. Мерни ланац приказан је на слици 4.21.

За праћење мерења и снимање сигнала коришћен је софтвер HBM Catman Easy, верзије 5.4.2.11, намењен за аквизицију и анализу мерних сигнала. Софтвер омогућава континуално праћење сигнала у временском домену, као и њихову накнадну анализу и обраду. Добијени резултати су визуализовани и архивирани у дигиталном облику ради даље анализе и обраде. Комплетан мерни систем произвођача HBK (раније HBM - Дармштат, Немачка) обезбеђује поузданост и високу тачност мерних резултата.



Слика 4.21. Мерни ланац.

4.3.5. Реализација експерименталног мерења

Експериментална мерења вршена су у кругу касарне „Генерал Јован Мишковић" у Београду. С обзиром на постављене услове у виду хоризонталне подлоге, сва мерења изведена су на травнатом влажном терену, као што је приказано на слици 4.22. Пре почетка мерења, возило је убрзано до релативно стабилне брзине како би се обезбедили уједначени и поновљиви почетни услови испитивања.



Слика 4.22. Возило БВП М80А у току експерименталних мерења.

Након стабилизације брзине, иницран је маневар заокрета у десно, током којег су континуално праћени релевантни мерни сигнали. Посебна пажња посвећена је томе да услови кретања остану непромењени у сваком понављању експеримента. Испитивање је изведено у режиму рада у коме је била активирана десна вишеламеласта спојница $S2$. Избор јединственог типа терена омогућио је да се минимизује утицај променљивости услова подлоге и да се добијени резултати користе за квалитативну и квантитативну валидацију симулационог модела.

5. РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

У овом поглављу представљени су остварени резултати спроведеног истраживања. Најзначајнији резултати односе се на валидацију развијеног симулационог модела. Спроведена експериментална истраживања показала су подударање са резултатима симулационог модела у мери која је, са инжењерског становишта, у потпуности задовољавајућа. Такође, симулациони модел тестиран је и за кретања брзоходног гусеничног возила на различитим деформабилним подлогама, избором одговарајућих параметара подлоге. И у овом случају симулациони модел дао је веома добре резултате у смислу приказа утицаја бочног клизања возила у току заокрета на деформабилним подлогама. На крају, симулациони модел додатно је тестиран на утицај промене параметара који се односе на конструкцију возила, као и на могућности примене алгоритама аутоматског управљања.

5.1. Валидација симулационог модела

Како је наведено у претходном поглављу, симулациони модел на основу улазних брзина премотавања гусеница (u_r и u_l) израчунава силе које делују на гусенично возило у хоризонталној равни, као и позицију тежишта возила у координатном систему XOY у свакој итерацији симулације. У оквиру претходног поглавља детаљно је објашњен начин дефинисања брзина премотавања гусеница, при чему је показано да постоји више могућих приступа њиховом задавању у току симулације.

У циљу валидације развијеног симулационог модела, као улазне величине коришћене су реалне брзине премотавања гусеница добијене на основу експерименталних мерења. Током експерименталних испитивања мерени су бројеви обртаја излазних вратила трансмисије, који су затим изражени у одговарајуће транслаторне брзине премотавања гусеница, узимајући у обзир познате и константне преносне односе у бочним редукторима (i_r), као и номиналне полупречнике погонских точкова (r), преузете из техничке документације возила [112]. На овај начин улазне величине симулационог модела не зависе од рада управљачког алгоритма и неидеалности погонског система, чиме је омогућена валидација модела интеракције гусенице и подлоге независно од утицаја осталих подсистема возила.

С обзиром на то да су експериментална мерења кретања возила реализована на влажној травнатој подлози, за описивање карактеристика наведене подлоге коришћене су вредности терамеханичких параметара преузете из релевантне литературе [18,84,109] и прилагођене

условима испитивања, док су у табели 5.1 приказане конкретне вредности параметара за подлогу по којој се возило кретало у току испитивања.

У претходном поглављу је наведено да развијени симулациони модел не узима у обзир утицај система за ослањање на расподелу нормалних (вертикалних) сила у контакту гусеница и подлоге, при чему је усвојена линеарна апроксимација расподеле притиска дуж контактне дужине гусенице. Наведене претпоставке представљају свесно усвојена поједностављења чији је циљ смањење сложености математичког модела, а самим тим и времена потребног за његово нумеричко решавање.

Табела 5.1. Параметри терена са експерименталног испитивања.

	Параметар		**Вредност**
Влажна травната подлога	c	[kPa]	15
	φ	[°]	25
	K	[cm]	5
	f		0.085

У оквиру експерименталних испитивања спроведено је десет мерења током маневра заокрета гусеничног возила на влажној травнатој подлози. Имајући у виду сложеност самог експеримента, пре свега у погледу контроле заокрета и управљања возилом БВП М80А, као и ограничења која произилазе из конструкције и принципа рада система управљања, за потребе валидације симулационог модела одабрана су три резултата мерења. Одабрани резултати уједно представљају и различите режиме кретања возила.

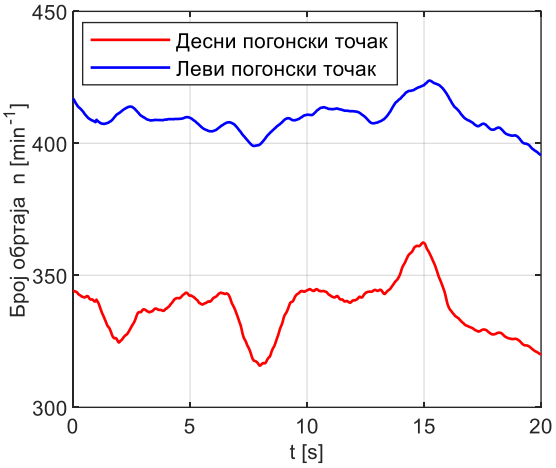
Први одабрани резултат односи се на мерење које је извршено током маневра заокрета возила при релативно константној подужној брзини. Други изабрани резултат мерења представља кретање возила током заокрета у условима благог повећања подужне брзине, док трећи резултат обухвата променљив режим кретања са наизменичним убрзавањем и успоравањем возила у току заокрета. Избор наведених резултата мерења извршен је ради валидације симулационог модела у различитим режимима кретања, при чему маневар заокрета представља инжењерски изазован случај услед изражене асиметрије расподеле оптерећења и сила између леве и десне гусенице.

Добијени резултати симулације упоређени су са експериментално измереним подужним силама које се генеришу у контакту гусеница и терена. Са циљем смањења утицаја инерцијалних сила и обезбеђивања стабилних услова за поређење експерименталних и симулационих резултата, анализа је примарно усмерена на мерења реализована при релативно константној брзини кретања, односно при минималним

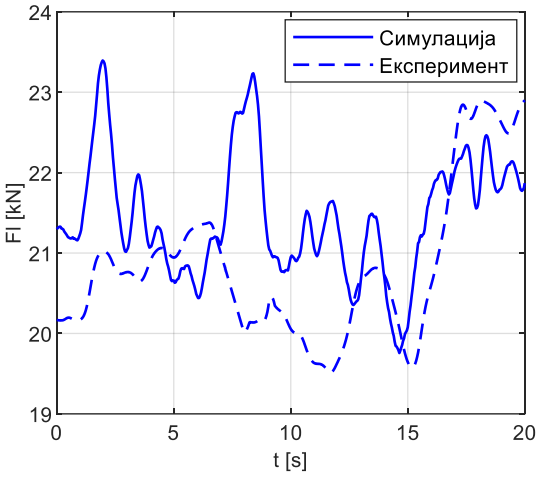
убрзањима возила. Оваквим приступом умањен је утицај инерцијалних сила, што доприноси поузданијој процени тачности израчунатих подужних сила интеракције између гусеница и терена. Измерене вредности бројева обртаја погонских точкова из првог експеримента приказане су на слици 5.1*а*, где се може уочити да су гусенице одржавале релативно константну брзину премотавања током заокрета, односно да је промена била у прихватљивим границама.

Приказане вредности измерених бројева обртаја коришћене су као улазне величине у симулациони модел, на основу којих су израчунате подужне силе у контакту гусеница и терена. На сликама 5.1*б* и 5.1*в* упоредо су приказане вредности подужних сила за леву и десну гусеницу добијене извршавањем симулационог модела и експерименталним мерењем. Резултати показују да симулациони модел адекватно репродукује временски ток и амплитуду подужних сила. У појединим временским интервалима уочена су локална одступања између симулационих и експерименталних резултата, која се могу приписати нехомогености терена. За десну гусеницу приметна су израженија одступања у осмој и петнаестој секунди (слика 5.1*в*), док су код леве гусенице одступања уочена у другој и осмој секунди (слика 5.1*б*). Релативне грешке у вредностима подужних сила за обе гусенице приказане су на слици 5.1*г*), при чему просечна релативна грешка износи 6.65% за десну гусеницу и 5.75% за леву. Укупно одступање између резултата добијених симулационим моделом и експерименталних резултата налази се у инжењерски прихватљивим границама и не прелази 8%, што указује на задовољавајућу тачност развијеног симулационог модела.

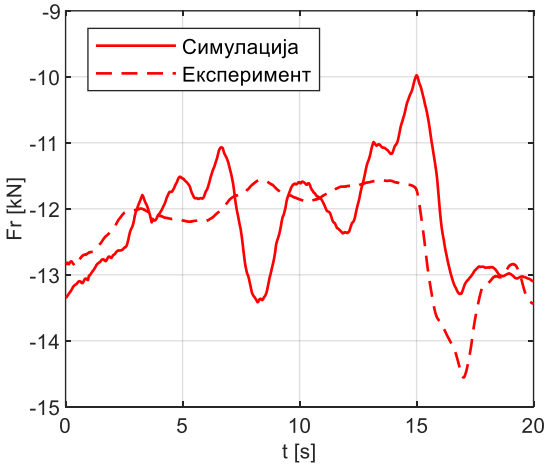
Измерени бројеви обртаја погонских точкова за друго експериментално мерење приказани су на слици 5.2*а*. Друго мерење реализовано је у условима убрзаног кретања возила, при чему је убрзање било у прихватљивом опсегу за анализу интеракције гусеница и терена. Због конструкционе сложености трансмисије и управљачког система возила, одржавање потпуно константног убрзања представља значајан изазов, посебно током маневара заокрета возила [116,117]. Израчунате вредности подужних сила за друго мерење приказане су на сликама 5.2*б* и 5.2*в*, за леву и десну гусеницу. Као и у случају првог мерења, резултати симулације показују високу сагласност са експериментално измереним подацима.



а)



б)

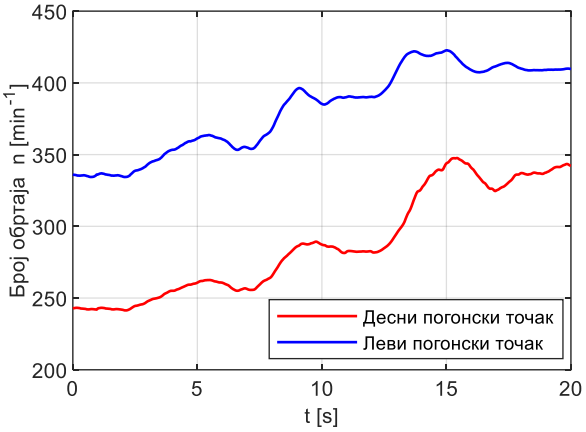


в)

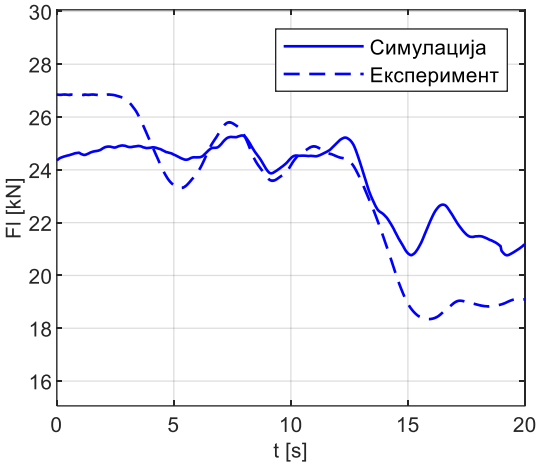


г)

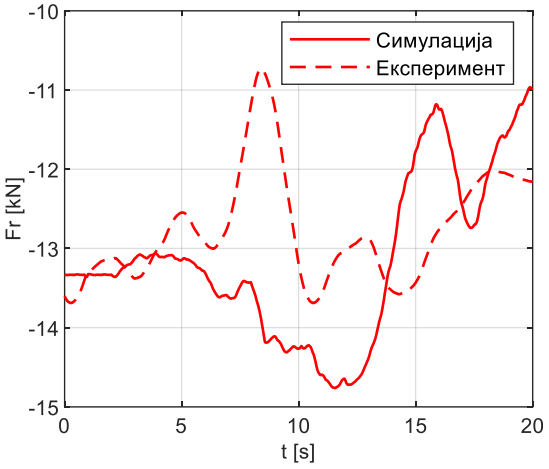
Слика 5.1. Резултати валидације за прво мерење.



а)



б)



в)



г)

Слика 5.2. Резултати валидације за друго мерење.

Ипак, уочена су одређена одступања, и то у осмој секунди за десну гусеницу (слика 5.2*в*), и у шеснаестој секунди за леву гусеницу (слика 5.2*б*). На слици 5.2*в* уочава се да у

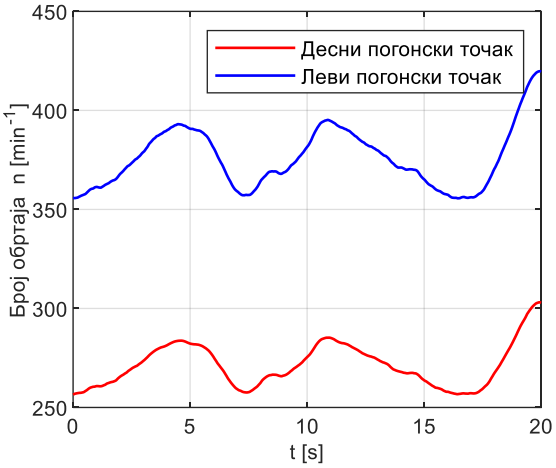
осмој секунди облик дијаграма на коме су приказани резултати симулације прати облик дијаграма на коме су приказани експериментални подаци, али да постоји велика разлика у вредности сила, преко 30%. Такође, на слици 5.2*б* уочава се да у шеснаестој секунди облик дијаграма на коме су приказани резултати симулације прати облик дијаграма на коме су приказани експериментални подаци, при чему је релативна грешка нижа, и износи око 20%.

Релативне грешке подужних сила за друго мерење приказане су на слици 5.2*г*, при чему просечна релативна грешка износи 7.52% за десну гусеницу, и 6.37% за леву. Укупно одступање између симулационих и експерименталних резултата остаје у прихватљивим границама и не прелази 8%, што поново потврђује стабилност и поузданост симулационог модела и у условима благо убрзаног кретања возила.

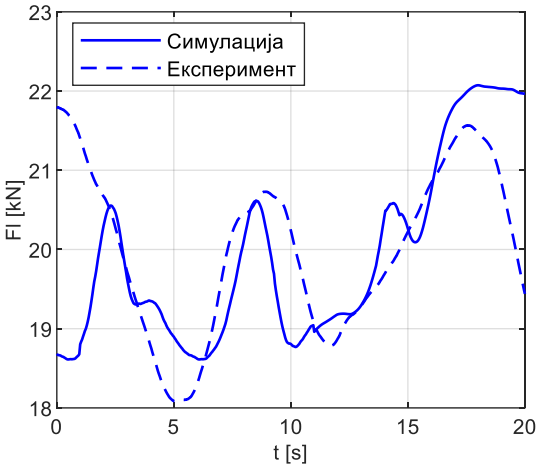
Измерени бројеви обртаја погонских точкова за треће експериментално мерење приказани су на слици 5.3*а*. Добијени резултати указују на променљив режим кретања возила, који обухвата наизменичне фазе благог убрзавања и успоравања током заокрета.

Израчунате вредности подужних сила за леву и десну гусеницу приказане су на сликама 5.3*б* и 5.3*в*. Резултати симулације показују добру сагласност са експериментално измереним подацима, при чему су код десне гусенице уочена израженија одступања на почетку симулације и око петнаесте секунде (слика 5.3*в*). Код леве гусенице мања одступања присутна су на почетку и крају симулације, док је у преосталом делу мерења уочена добра конзистентност између симулираних и експерименталних вредности (слика 5.3*б*). Релативне грешке подужних сила за треће мерење приказане су на слици 5.3*г*, при чему просечна релативна грешка износи 7.83% за десну гусеницу и 3.49% за леву. И у овом случају укупна одступања остају у прихватљивим границама и не прелазе 8%, што указује на задовољавајућу поузданост симулационог модела и у условима променљивог режима кретања.

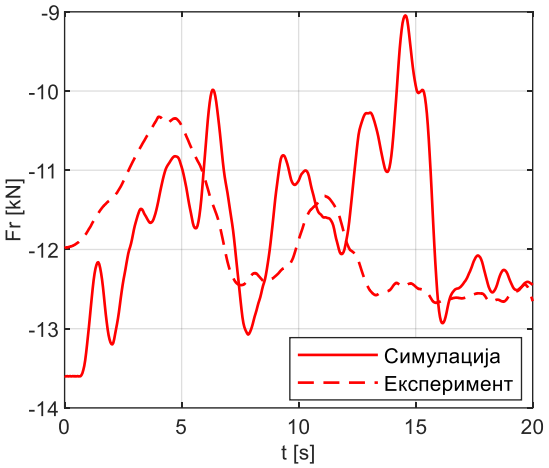
Извршеном анализом може се закључити да развијени симулациони модел даје резултате прихватљиве тачности, имајући у виду поједностављења усвојена у процесу моделирања. Поређење експериментално измерених и симулираних подужних сила показује да симулациони модел поуздано израчунава силе које се развијају у контакту гусеница и терена у подужној оси возила. Иако су у појединим временским интервалима уочена локализована одступања, укупна грешка остаје у прихватљивом опсегу, што потврђује применљивост и тачност модела у анализи динамике управљања гусеничних возила.



а)



б)



в)



г)

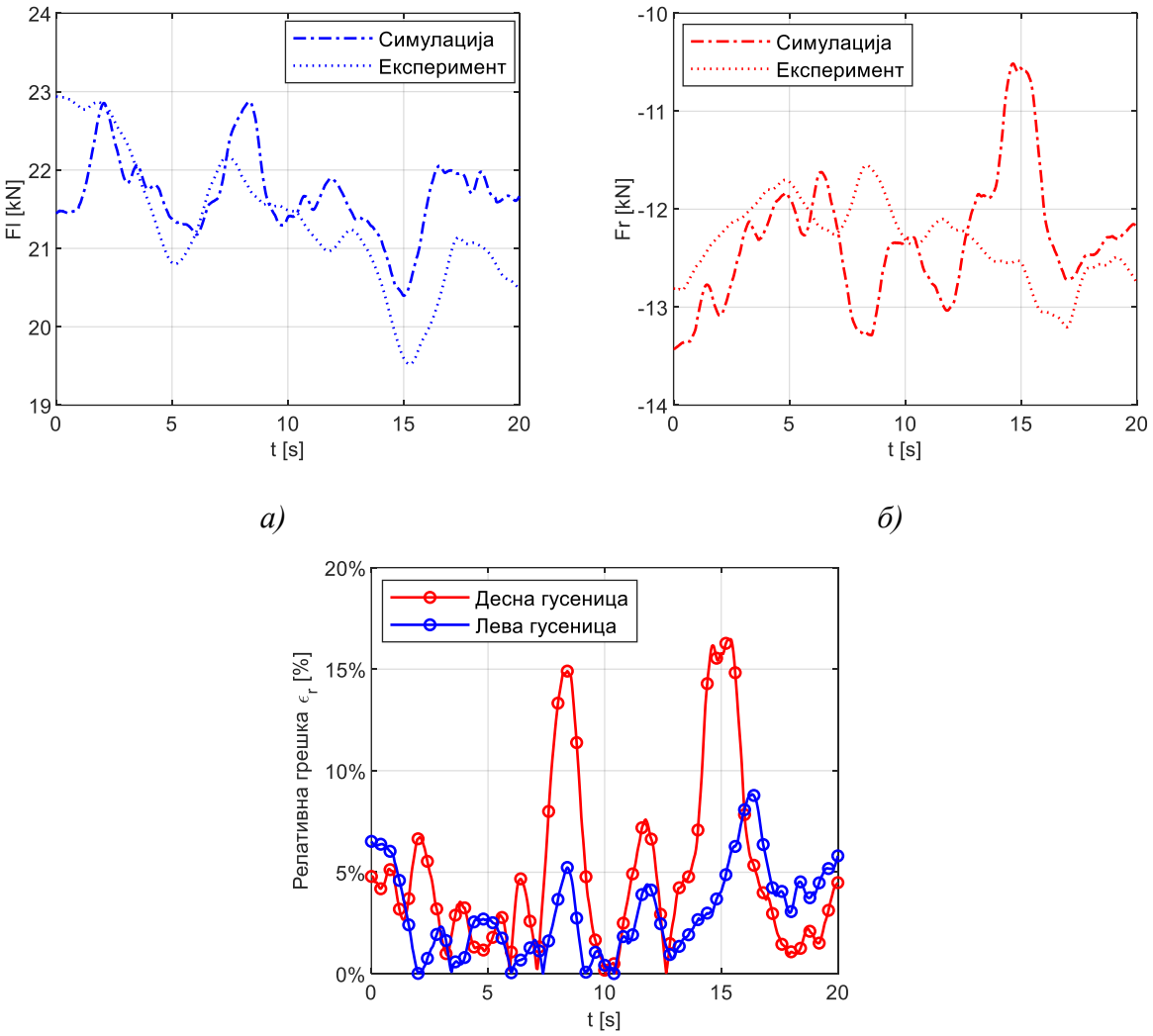
Слика 5.3. Резултати валидације за треће мерење.

Уоченим одступањима између резултата симулације и експерименталних мерења може се приписати више утицајних фактора. Један од доминантних разлога јесте нехомогеност терена, будући да у реалним условима отпор кретању варира услед локалних промена у структури и стању терена, док симулациони модел подразумева хомогену подлогу са константним параметрима. Поред тога, и сложеност система за пренос снаге представља извор одступања. У претходном поглављу описан је процес уласка возила БВП М80А у заокрет, односно да се током управљачких маневара активирају вишеламеласте спојнице. Због наведеног, сам процес заокрета возила зависи од више фактора, укључујући умеће возача, услове рада возила током заокрета, као и изабрани преносни однос, брзину кретања и положај точка управљача [116]. Додатни извори одступања резултата обухватају грешке мерења, присуство шума у сигналима давача, као и могућа одступања у усвојеним вредностима параметара модела који дефинишу карактеристике како возила тако и подлоге.

Са циљем умањења утицаја наведених извора грешака и добијања поузданијих резултата, извршена је додатна анализа добијених података кроз сагледавање средњих вредности (слика 5.4).

Просечне вредности подужних сила за леву и десну гусеницу приказане су на сликама 5.4*а* и 5.4*б*, што омогућава јаснију и стабилнију процену укупне сагласности симулационих и експерименталних резултата. Анализа просечних вредности подужних сила додатно потврђује конзистентност између симулационих и експерименталних резултата. Релативне грешке у просечним вредностима сила, приказане на слици 5.4*в*, износе 4.98% за десну гусеницу и 3.01% за леву.

Ове вредности показују да одступања остају у прихватљивим границама, при чему лева гусеница показује мања одступања у односу на десну. Мање грешке за леву гусеницу указују на стабилнију интеракцију између гусенице и терена, док се нешто већа одступања за десну могу образложити појавом локалних промена карактеристика терена, услед занемарених динамичких ефеката, као што су вибрације у гусеничном кретачу, и идеализацијом расподеле нормалног притиска. Односно, узрок одступања добијених резултата у највећој мери се налази у усвојеним поједностављењима модела. У сваком случају, може се закључити да израчунате релативне грешке потврђују поузданост симулационог модела у описивању интеракције гусеница и терена током заокрета.



а) *б)*

в)

Слика 5.4. Просечна вредност.

5.2. Симулације кретања гусеничног возила по различитим деформабилним подлогама

Стабилност развијеног модела и динамика кретања брзоходног гусеничног возила анализирана је кроз симулације кретања возила на пет различитих деформабилних подлога, чије су карактеристике приказане у табели 4.1. Различите деформабилне подлоге обухваћене анализом значајно се разликују по носивости, отпорности на смицање и способности развоја контактних сила, што директно утиче на појаву клизања, проклизавања и ефективни радијус заокретања возила. На тај начин омогућено је испитивање понашања модела у условима од „тврдих" до изразито „меких" подлога. Добијени резултати показали су очекивано динамичко понашање возила, и квалитативно су у складу са резултатима из релевантних радова који се баве анализом динамике кретања гусеничних возила у упоредивим условима рада [74–76,118,119]. Иако директно поређење добијених резултата

симулације са наведеним радовима није могуће, анализом је утврђено да се понашање модела у смислу карактера промене контактних сила возила и подлоге поклапа са резултатима приказаним у наведеним радовима.

Циљ приказаних симулација није квантитативно репродуковање конкретних експерименталних резултата, већ анализа стабилности, осетљивости и физичке веродостојности развијеног симулационог модела у условима кретања по различитим деформабилним подлогама, као и сагледавање утицаја карактеристика подлоге на динамику заокрета гусеничног возила.

Да би се детаљније анализирало понашање модела, а самим тим и возила, спроведен је низ симулација које одговарају реалном кретању возила. У раду су приказани резултати који се односе на заокрет возила при стабилним условима кретања, затим при нестабилним условима, као и при сложеном кретању које подразумева више маневара у току једне извршене симулације. Под стабилним условима кретања подразумева се заокрет при коме возило задржава релативно константан радијус кретања, без наглашених осцилација брзина и контактних сила. Насупрот томе, нестабилни услови кретања карактеришу се појавом промене радијуса током заокрета при истим брзинама премотавања гусеница, повећаним клизањем гусеница и значајним варијацијама контактних сила, што у крајњем случају може довести до губитка управљивости.

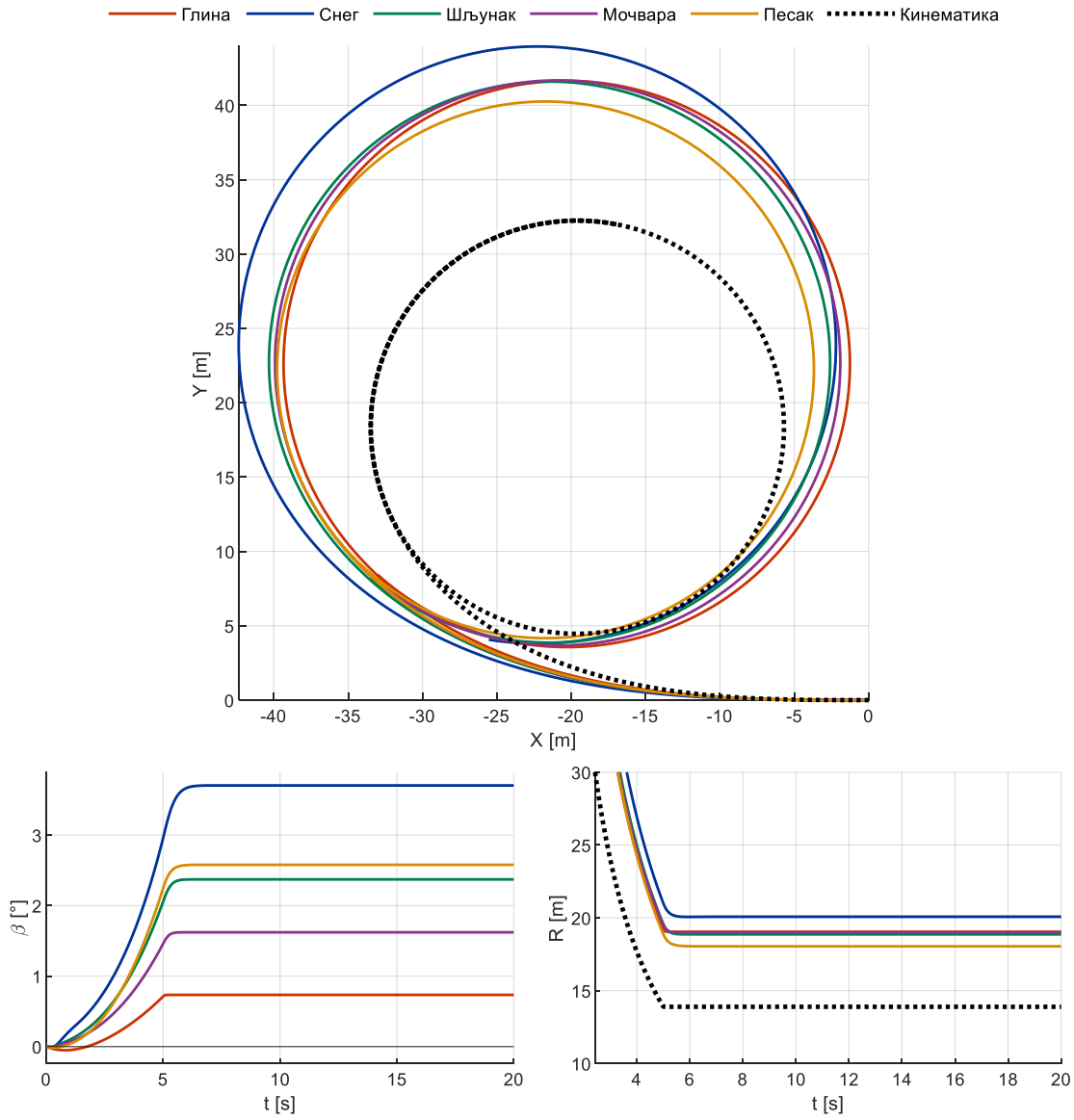
За сваку извршену симулацију представљени су резултати који приказују кинематичке и динамичке параметре возила у току симулације. Резултати приказују промену трајекторије, промену радијуса кретања, затим силе које делују у контакту возила и подлоге, као и брзине и убрзања возила у току кретања. Такође, за сваку симулацију приказане су и трајекторије кретања идеалног кинематичког модела, који не укључује клизање и проклизавање возила и гусеница. Поређење резултата симулационог модела са идеалним кинематичким моделом, који не укључује ефекте клизања и проклизавања, омогућава јасно уочавање утицаја интеракције гусенице и подлоге на динамику заокрета. На овај начин квантификује се одступање стварног кретања од идеализованих кинематичких претпоставки које се често користе у моделима управљања.

Како је већ наведено, систем за заокрет брзоходног гусеничног возила БВП М80А припада групи несиметричних система. Односно, приликом заокрета долази до успоравања унутрашње гусенице, док спољашња гусеница задржава брзину премотавања коју је имала пре заокрета, чиме се остварује разлика у брзинама премотавања гусеница, а самим тим и

заокрет возила. У складу са наведеним, и у току спроведених симулација вршено је успоравање унутрашње гусенице, док је спољашња гусеница задржавала брзину премотавања. Изабране вредности брзина премотавања које су коришћене за симулације одговарају стварним брзинама које возило може да оствари, како у току праволинијског кретања, тако и у току заокрета.

5.2.1. Резултати симулације стабилног заокрета гусеничног возила

На сликама од 5.5 до 5.7 приказани су резултати симулације стабилног десног заокрета брзоходног гусеничног возила БВП М80А при почетној брзини кретања возила од 30 km/h. Заокрет је остварен успоравањем унутрашње гусенице на брзину од 25 km/h, док је спољашња гусеница задржала почетну брзину премотавања.



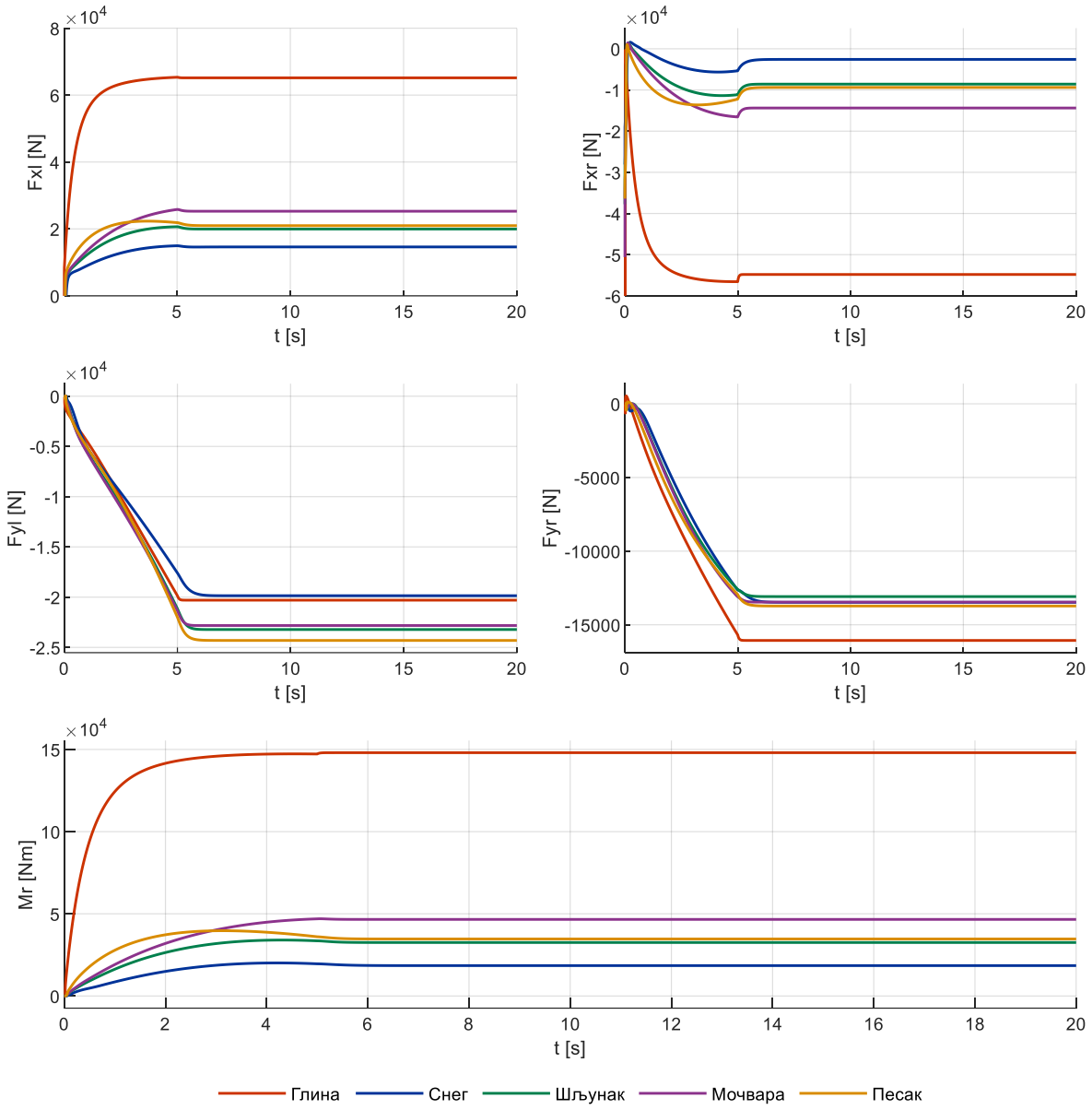
Слика 5.5. Трајекторија возила у току стабилног заокрета.

Анализа је спроведена за пет различитих деформабилних подлога, при чему су добијени резултати трајекторије развијеног симулационог модела упоређени са идеалним кинематичким моделом који је на дијаграмима представљен као „Кинематика", а који подразумева да су возило и подлога апсолутно крути, односно да током кретања не долази до клизања возила. На основу приказаних трајекторија кретања може се уочити да возило у свим анализираним случајевима остварује стабилан заокрет без наглашених осцилација путање. Стварни радијус кретања возила значајно зависи од карактеристика подлоге, при чему највећи радијус заокрета остварује возило на подлози са најмањом носивошћу (у овом случају снег), док се на подлогама веће носивости остварује мањи радијус кретања. Поређењем са идеалним кинематичким моделом може се уочити да развијени модел у свим случајевима даје већи радијус заокрета, што је директна последица клизања и проклизавања гусеница услед интеракције са деформабилном подлогом. Такође, уочава се да код идеалног кинематичког модела возило започиње други круг заокрета, и до краја симулације направи један пун круг и око пола другог круга, при чему се трајекторије оба круга апсолутно поклапају. За исто време, резултати симулационог модела показују да возило на свих пет врста подлога заврши само први круг заокрета.

Промена угла бочног клизања (β) и радијуса кретања у времену, указује да се након прелазног периода, у ком долази до промене брзине премотавања унутрашње гусенице, систем стабилизује и улази у стационарни режим кретања. У том периоду радијус заокрета и угао бочног клизања возила достижу приближно константне вредности, што указује на стабилан карактер заокрета при задатим условима кретања.

Анализа дејства сила на возило у току заокрета приказана је на слици 5.6. Анализа контактних сила које се јављају дуж подужне осе возила (x - оса) показује да у току уласка возила у заокрет долази до пораста сила услед промене брзине премотавања унутрашње гусенице. Уздужне силе на унутрашњој гусеници (у овом случају десна) постају негативне, односно постају кочне силе, што говори да се возило креће радијусом кретања који је мањи од слободног радијуса заокрета Rs који је приказан на слици 4.14. Такође, заједно са повећањем вредности подужних сила, повећавају се и вредности бочних сила, као и укупни отпорни момент заокрету који делује на возило, а представља збир отпорних момената (57) који се јављају на десној и левој гусеници у току заокрета. Спроведеном анализом уочено је и да интензитет сила, као и укупни момент заокрету зависе од карактеристика подлоге.

$$M_r = M_{Rr} + M_{Rl} \tag{57}$$

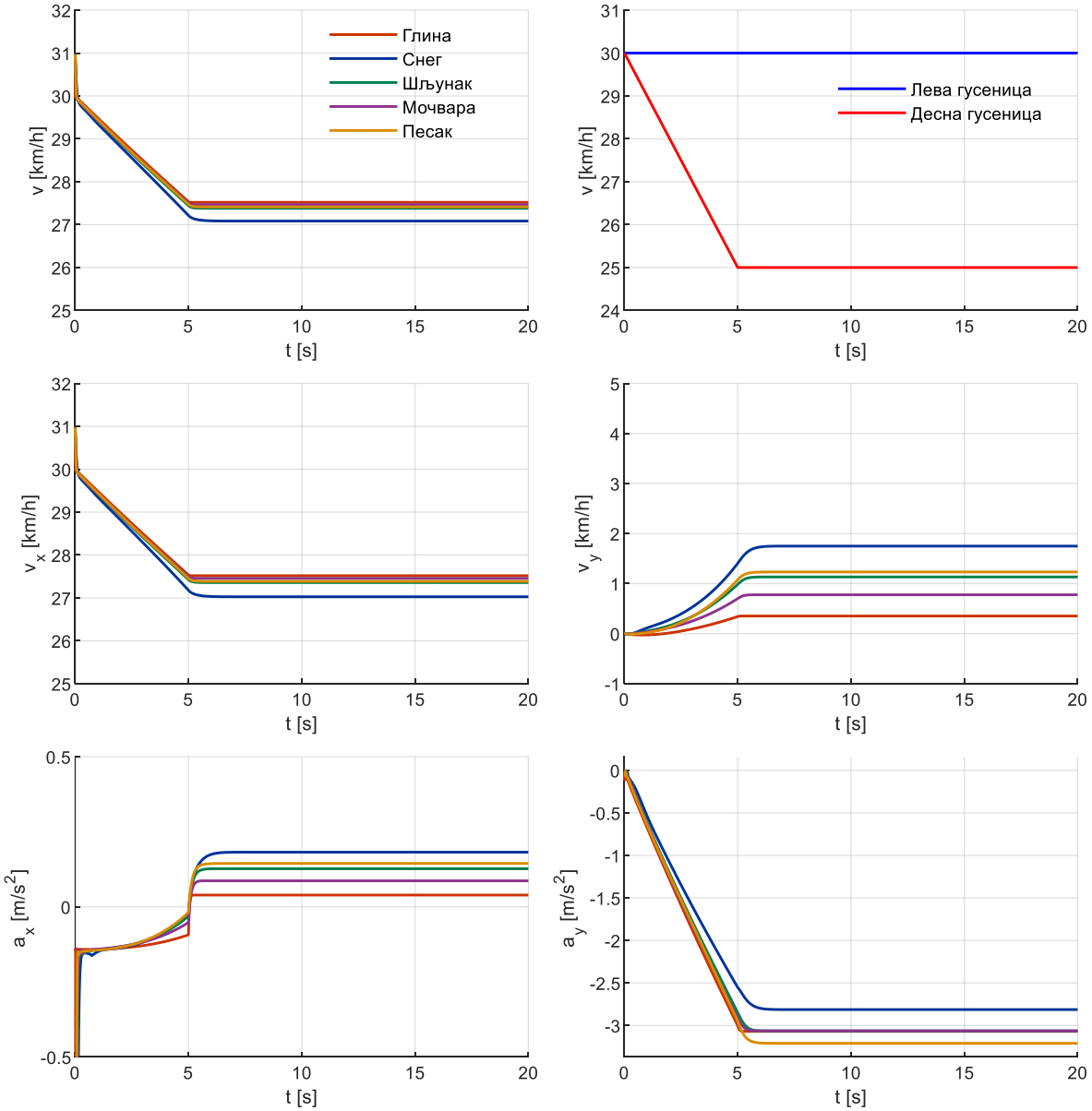


Слика 5.6. Оптерећења која делују на возило у току стабилног заокрета возила.

Анализа брзина и убрзања возила показује да успоравање унутрашње гусенице доводи до смањења укупне брзине возила, што је очекивано код несиметричних система за заокрет. Због појаве бочног клизања, јављају се и бочне компоненте брзине које су приказане на слици 5.7. Убрзања возила достижу стабилне вредности након прелазног периода, без појаве нереалних осцилација, што указује на нумеричку стабилност и физичку конзистентност развијеног модела.

Приказани резултати потврђују да развијени симулациони модел омогућава стабилну и физички веродостојну анализу заокрета брзоходног гусеничног возила на различитим

деформабилним подлогама, што представља поуздану основу за даље анализе нестабилних режима кретања и сложенијих маневара.



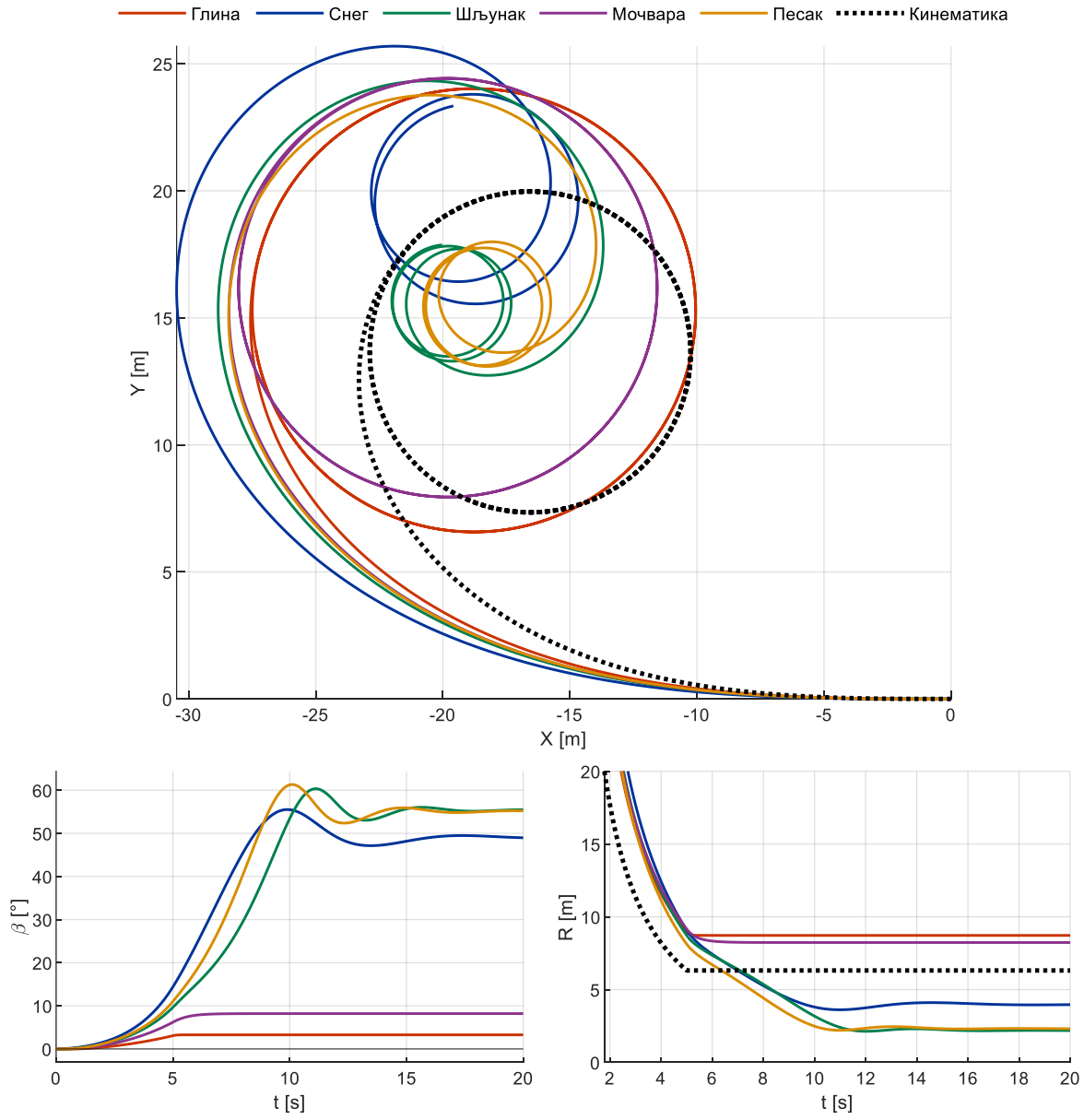
Слика 5.7. Промена брзине и убрзања возила у току стабилног заокрета.

5.2.2. Резултати симулације нестабилног заокрета гусеничног возила

На сликама од 5.8 до 5.10 приказани су резултати симулације нестабилног заокрета брзоходног гусеничног возила БВП М80А при почетној брзини кретања од 30 km/h. Заокрет је остварен успоравањем унутрашње гусенице на брзину од 20 km/h, док је спољашња гусеница задржала почетну брзину премотавања. Приказани резултати указују да при израженијем успоравању унутрашње гусенице долази до губитка стабилног режима заокрета возила на подлогама мање носивости, при чему кретање возила прелази у сложен,

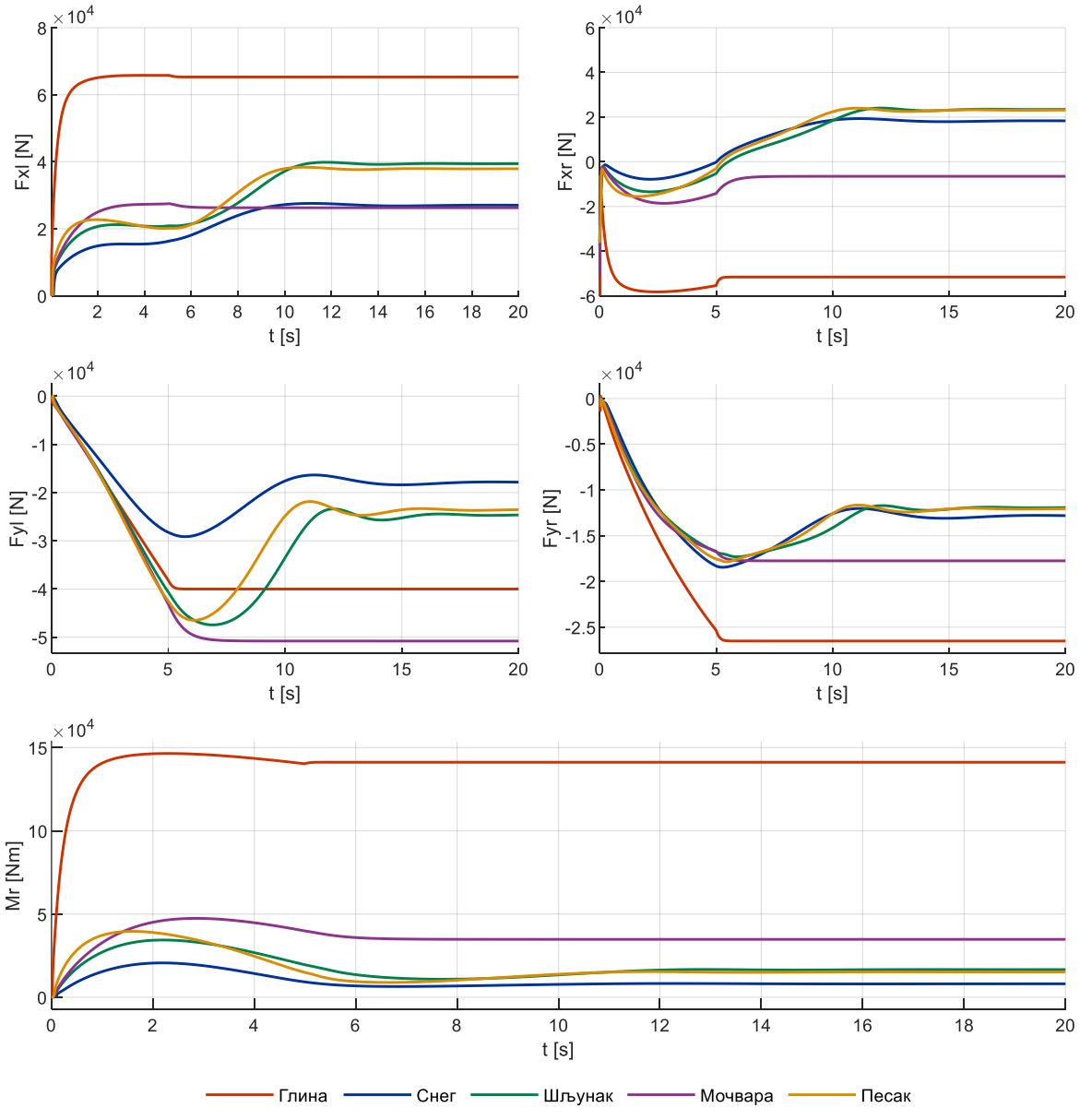
нестабилан режим који карактеришу нагле промене радијуса, угла бочног клизања и контактних сила.

Анализа трајекторија кретања показује да возило не остварује јединствен стабилан радијус заокрета на свим подлогама, већ долази до постепеног смањења радијуса и појаве спиралног кретања. Овакво понашање указује на губитак стабилног заокрета, и интеракција гусеница и подлоге има доминантан утицај на путању возила. Упоређивање добијених трајекторија са идеалним кинематичким моделом показује значајно одступање, што потврђује да клизање и проклизавање гусеница не могу бити занемарени у анализи кретања возила.



Слика 5.8. Трајекторија возила у току нестабилног кретања.

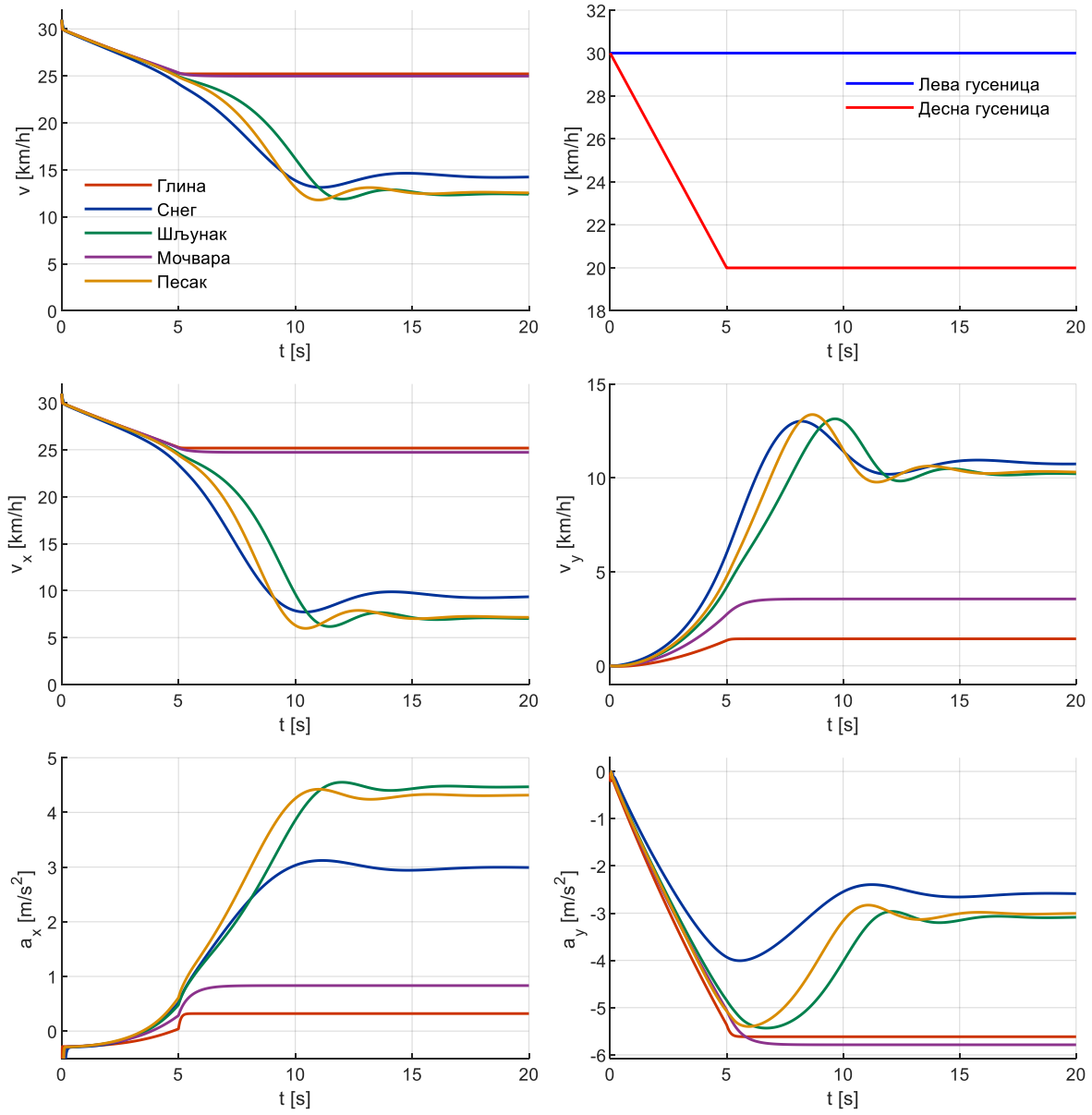
Изражена нестабилност система уочава се на основу промене угла бочног клизања возила и радијуса кретања у времену. Уместо достизања константних вредности, при достизању стабилног режима кретања (пета секунда симулације), присутно је константно повећање угла бочног клизања до 60° које траје све до десете секунде, док су код радијуса кретања уочене нагле и неконтролисане промене за снег, шљунак и песак. Наведено понашање указује на губитак управљивости возила на наведеним подлогама.



Слика 5.9. Оптерећења која делују на возило у току нестабилног кретања.

На слици 5.9 приказана је промена подужних и бочних сила, као и укупан отпорни момент заокрету у току нестабилног заокрета. Као и претходно, за две подлоге (глина и мочвара) возило остварује стабилан заокрет, а карактер промене сила и момента, одговара

претходно описаном случају стабилног заокрета. У случају подлога као што су снег, шљунак и песак, возило нема стабилан радијус заокрета за наведене брзине кретања. У том случају подужне и бочне силе не достижу стабилне вредности, већ њихов интензитет варира у току времена. Такође, уочена је и појава да је вредност подужних сила на унутрашњој гусеници позитивна, што одговара случају кретања гусеничног возила када је радијус заокрета већи од слободног радијуса Rs.



Слика 5.10. Промена брзине и убрзања возила у току нестабилног кретања.

Анализом брзина возила приказаних на слици 5.10 уочено је да током уласка у заокрет долази до израженог смањења подужне компоненте брзине возила (x - оса), праћене порастом бочне компоненте брзине возила (y - оса), што указује на промену карактера

кретања возила. Уместо успостављања стационарног режима, регистроване су значајне промене брзина у времену, чији интензитет зависи од карактеристика подлоге. Посебно је уочено да код појединих подлога долази до наглог опадања укупне брзине кретања, што представља директну последицу губитка стабилности заокрета.

Уочено је и да интензитет брзине возила током одређених фаза кретања остаје приближно константан за подлоге као што су глина и мочвара, док убрзања a_x и a_y нису једнака нули. Разлог за то је чињеница да се возило креће по закривљеној путањи, услед чега долази до промене правца вектора брзине. Убрзање је у овом случају последица ротације координатног система xoy везаног за возило, и има карактер центрипеталног убрзања, које не доводи до промене интензитета брзине, већ искључиво до промене правца вектора брзине, а према једначинама (11) и (12).

5.2.3. Резултати симулације кретања возила по сложеној трајекторији

Како је описано у претходном поглављу, пример имплементације математичког модела у MATLAB/Simulink приказан је за случај реализације заокрета у десно. Међутим, развијени симулациони модел проширен је и сетом идентичних једначина које описују заокрет возила у лево, као и системом једначина (47) - (50) којима је описано дејство сила на возило у току праволинијског кретања.

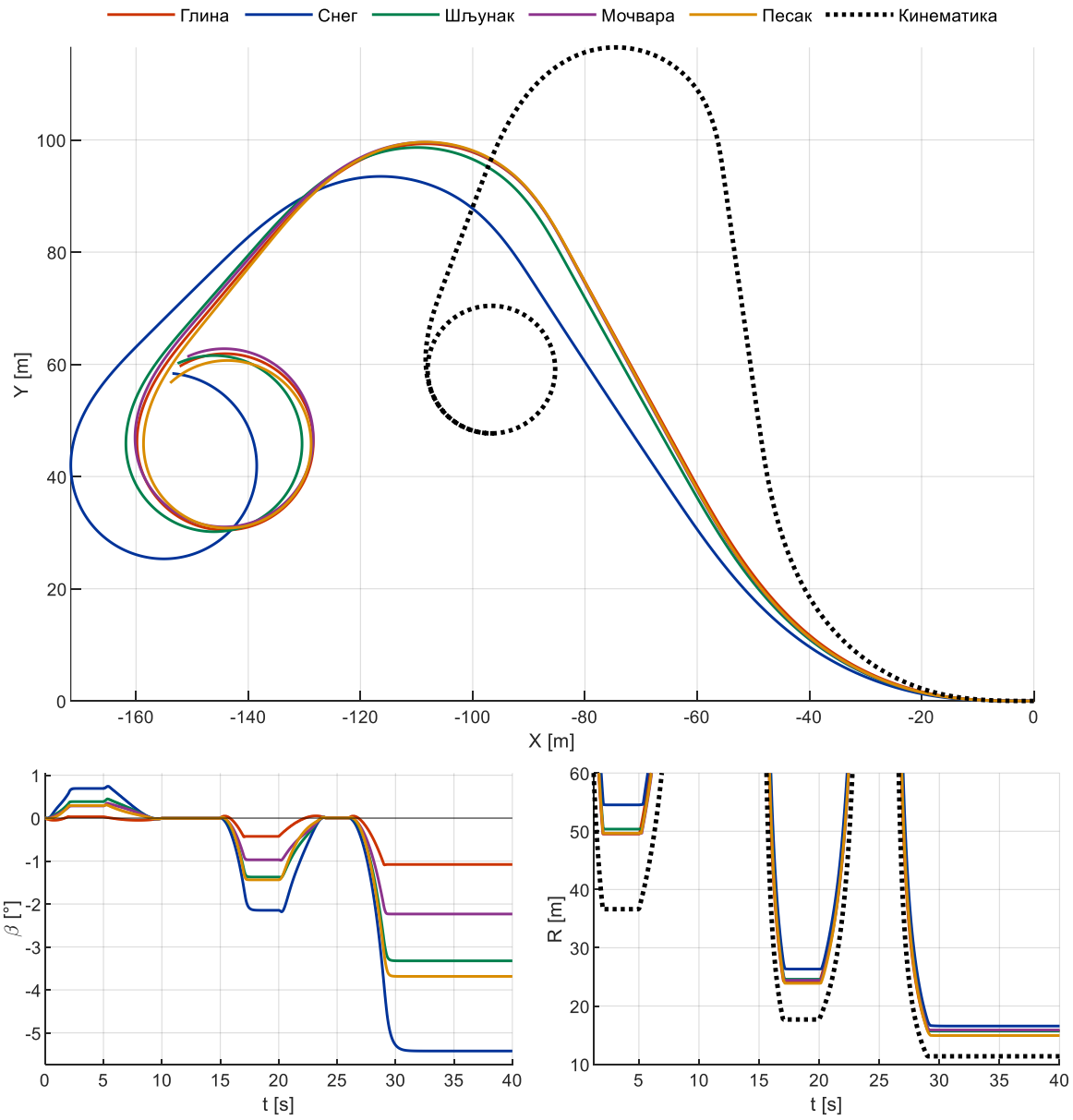
Ради тестирања симулационог модела у случају сложеног кретања дефинисана су два сценарија. У првом сценарију возило се креће брзином од 30 km/h, када се најпре успорава десна гусеница на 28 km/h, и возило улази у благи заокрет у десно. Након завршетка делимичног заокрета, возило наставља праволинијско кретање. После 15 секунди кретања, долази до успоравања леве гусенице до брзине од 26 km/h, када возило започиње заокрет у лево. Након тога, возило опет наставља праволинијско кретање, а недуго затим поново улази у маневар заокрета у лево, при чему лева гусеница успорава до брзине од 24 km/h. У овом сценарију возило остварује заокрет по принципу несиметричног система за заокрет.

У другом сценарију дефинисан је симетричан режим сложеног кретања са наизменичним маневрима заокрета у десно и у лево. Возило се креће константном брзином од 20 km/h, при чему се заокрети реализују наизменичним успоравањем и убрзавањем десне и леве гусенице. На почетку кретања долази до успоравања десне и убрзавања леве гусенице, услед чега возило започиње заокрет у десно. Након завршетка маневра пуног круга, брзине премотавања обе гусенице се изједначавају, чиме се остварује краткотрајно праволинијско кретање. У наставку симулације долази до успоравања леве и убрзавања десне гусенице, услед чега возило улази у заокрет у лево. У овом сценарију заокрети се остварују наизменично, што омогућава анализу одзива симулационог модела на честе промене управљачких улаза и процену његове стабилности и физичке конзистентности у условима сложеног, динамички променљивог кретања.

На основу наведених сценарија, приказани су и анализирани резултати који се односе на промену трајекторије кретања, угао бочног клизања возила и ефективни радијус заокрета у времену. Поред кинематичких величина, посебно су обрађени и резултати који се односе на контактне силе између гусеница и подлоге. Утицај карактеристика подлоге на одзив система у условима сложеног, временски променљивог кретања сагледан је упоредном анализом резултата за различите деформабилне подлоге.

5.2.3.1. Резултати кретања возила по сложеној трајекторији (I сценарио)

На сликама од 5.11 до 5.13 приказани су резултати симулације кретања возила према описаном I сценарију. Приказане су трајекторије кретања возила у условима сложеног маневра за пет различитих деформабилних подлога. Трајекторије добијене симулацијом значајно одступају од идеалне кинематичке трајекторије.

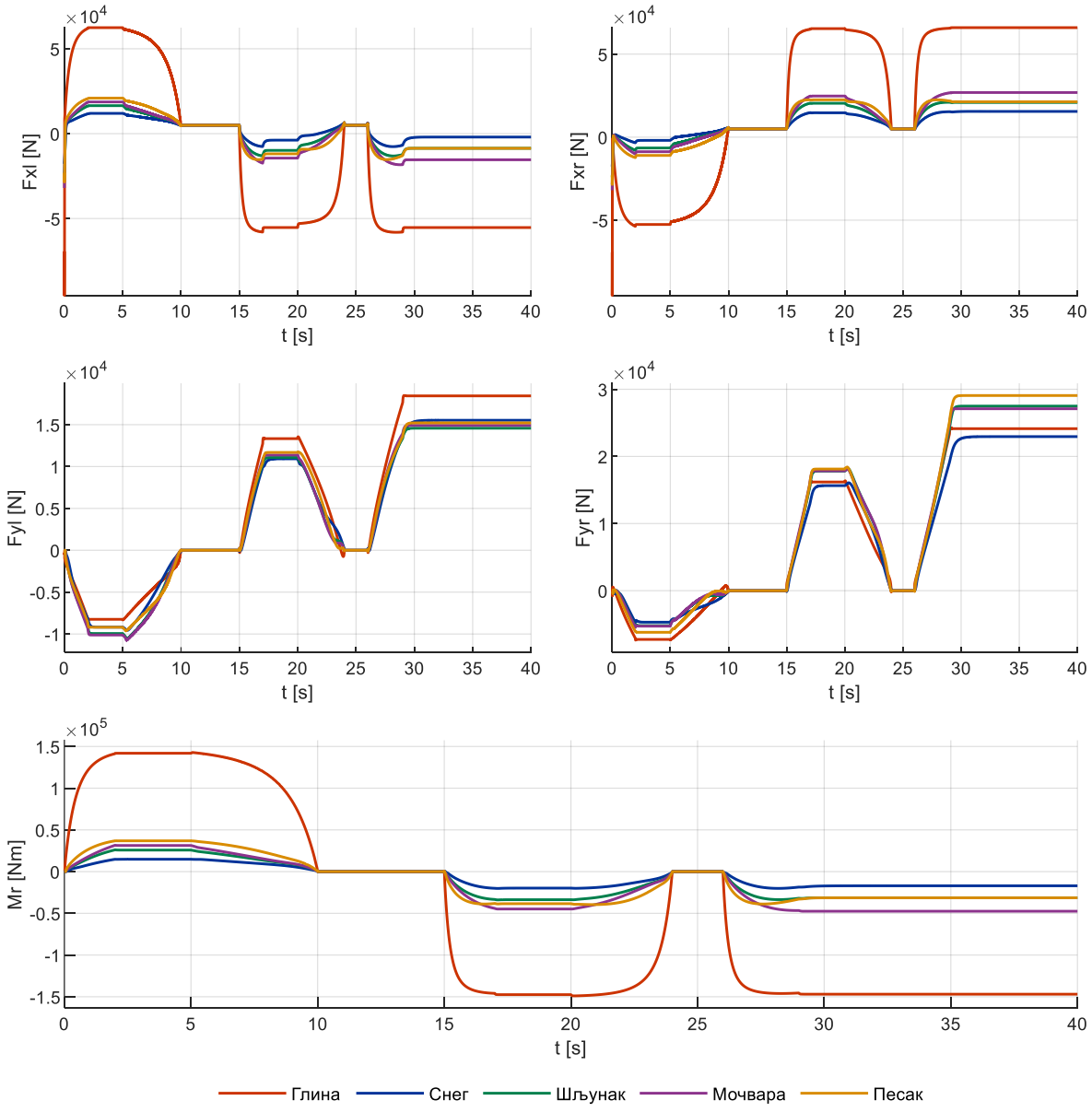


Слика 5.11. Трајекторија возила у току сложеног кретања - I сценарио.

У току целе симулације кретања, возило остварује стабилно кретање, без осциловања радијуса заокрета. Највећа апсолутна промена бочног угла клизања возила уочена је код подлоге под ознаком - снег, где је након последње промене режима, и уласка возила у леви

заокрет, достигнута највећа негативна вредност угла, док су код осталих подлога постигнуте мање апсолутне вредности.

На слици 5.12 приказане су промене сила и момента отпору заокрета возила за описани сценарио кретања возила. Добијени резултати одговарају и прате физичке појаве које се дешавају, односно вредности сила одговарају условима кретања. Заправо, највеће силе које се јављају у подужној оси возила односе се на подлогу под ознаком глина.

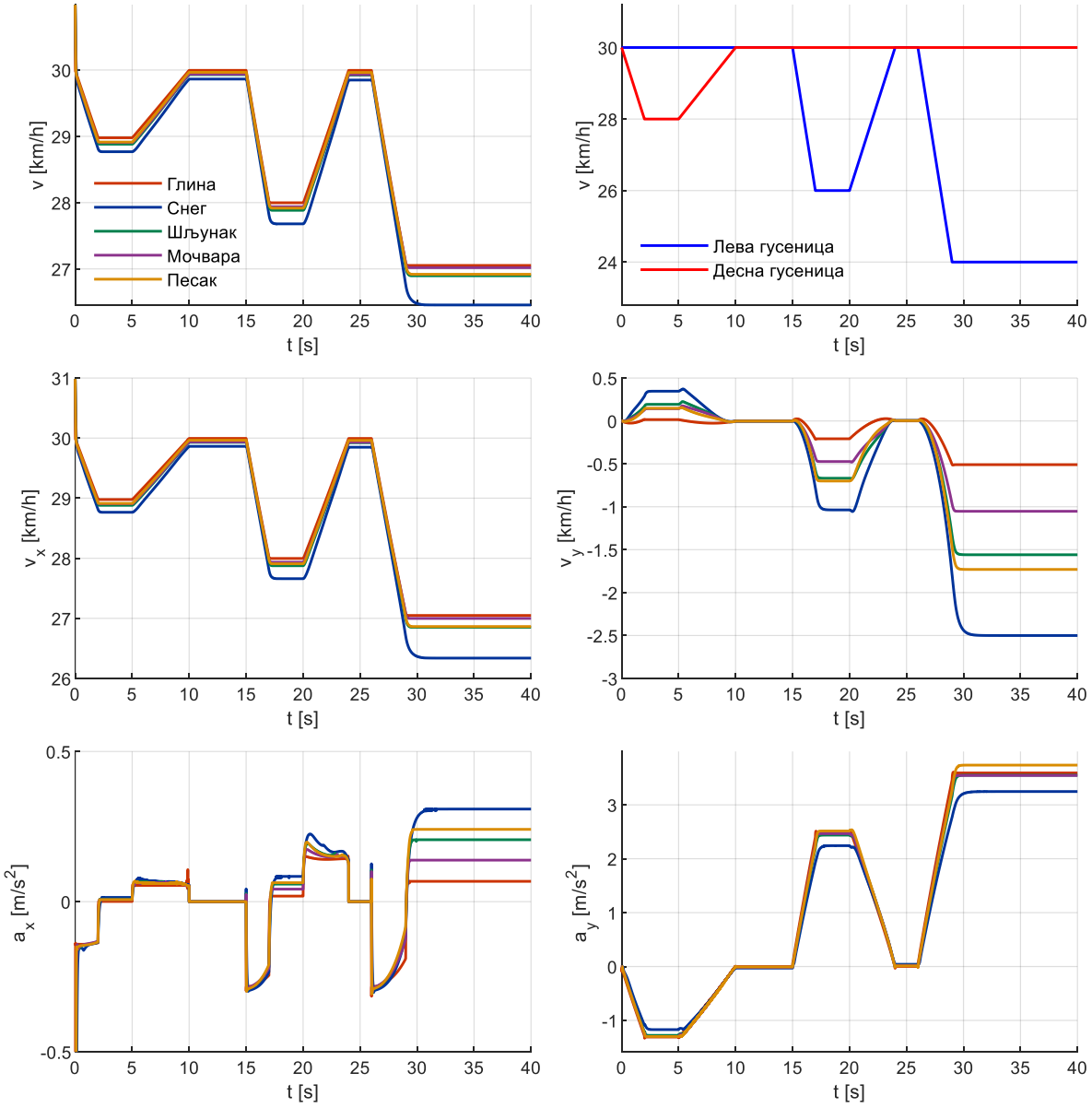


Слика 5.12. Оптерећења која делују на возило у току сложеног кретања - I сценарио.

Анализирајући силе у подужној оси возила, уочено је и да су подужне силе релативно једнаке за све типове терена, што одговара стварном кретању возила, јер се у току праволинијског кретања јављају отпори кретању који су релативно слични за различите

подлоге. Карактер промене бочних сила прати кретање возила, тако да се може закључити да га и оне физички веродостојно описују.

На слици 5.13 представљени су резултати који показују кинематичке параметре кретања возила. Анализом укупне брзине возила, уочено је да највећи пад брзине возило остварује на подлози са најмањом носивошћу, а то је снег. Очекивано, и највеће повећање бочне брзине односи се на кретање по наведеној подлози.

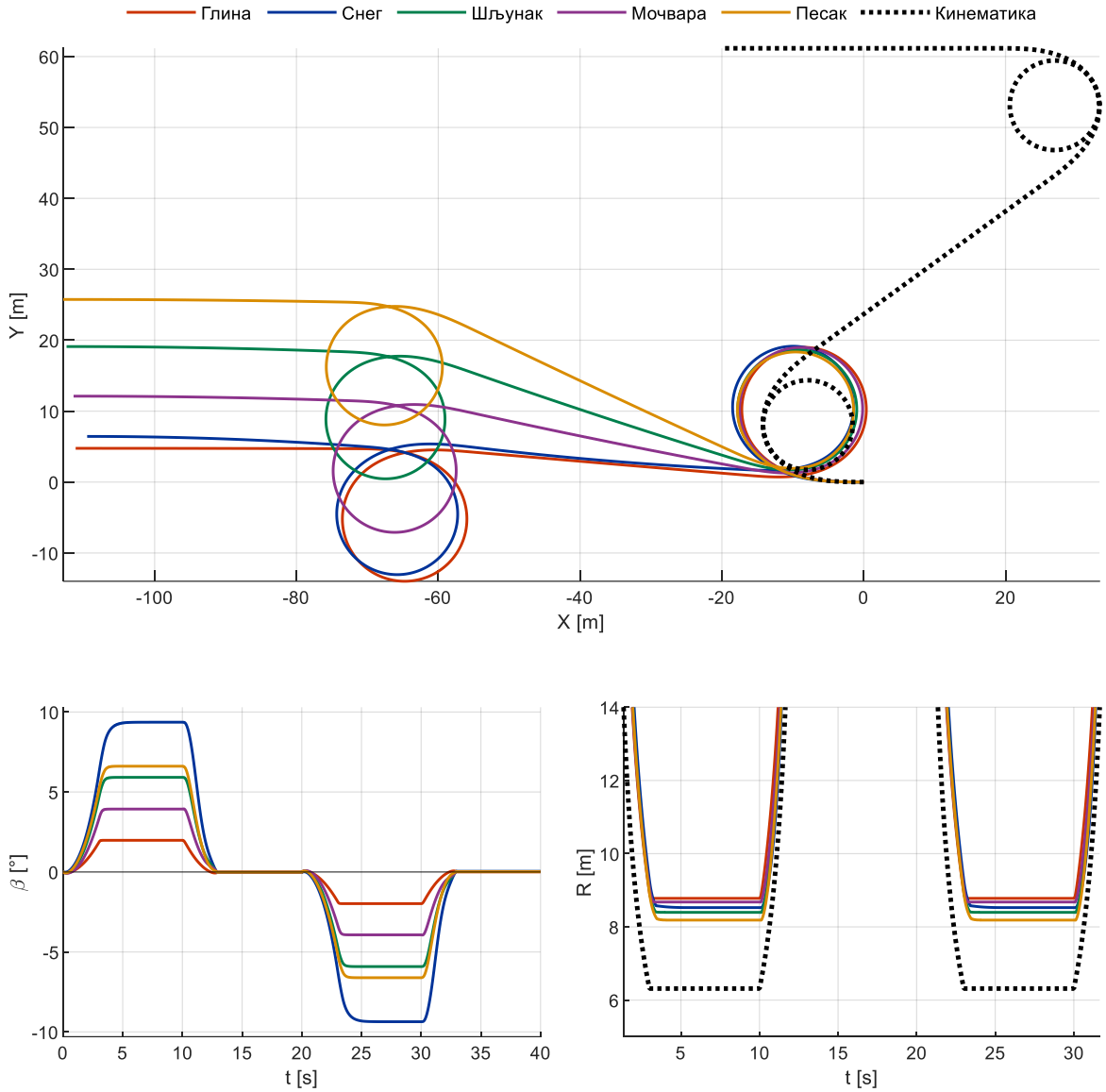


Слика 5.13. Промена брзине и убрзања возила у току сложеног кретања - I сценарио.

5.2.3.2. Резултати кретања возила по сложеној трајекторији (II сценарио)

На сликама од 5.14 до 5.16 приказани су резултати симулације кретања возила према описаном II сценарију, који обухвата симетричан заокрет са наизменичним маневрима у

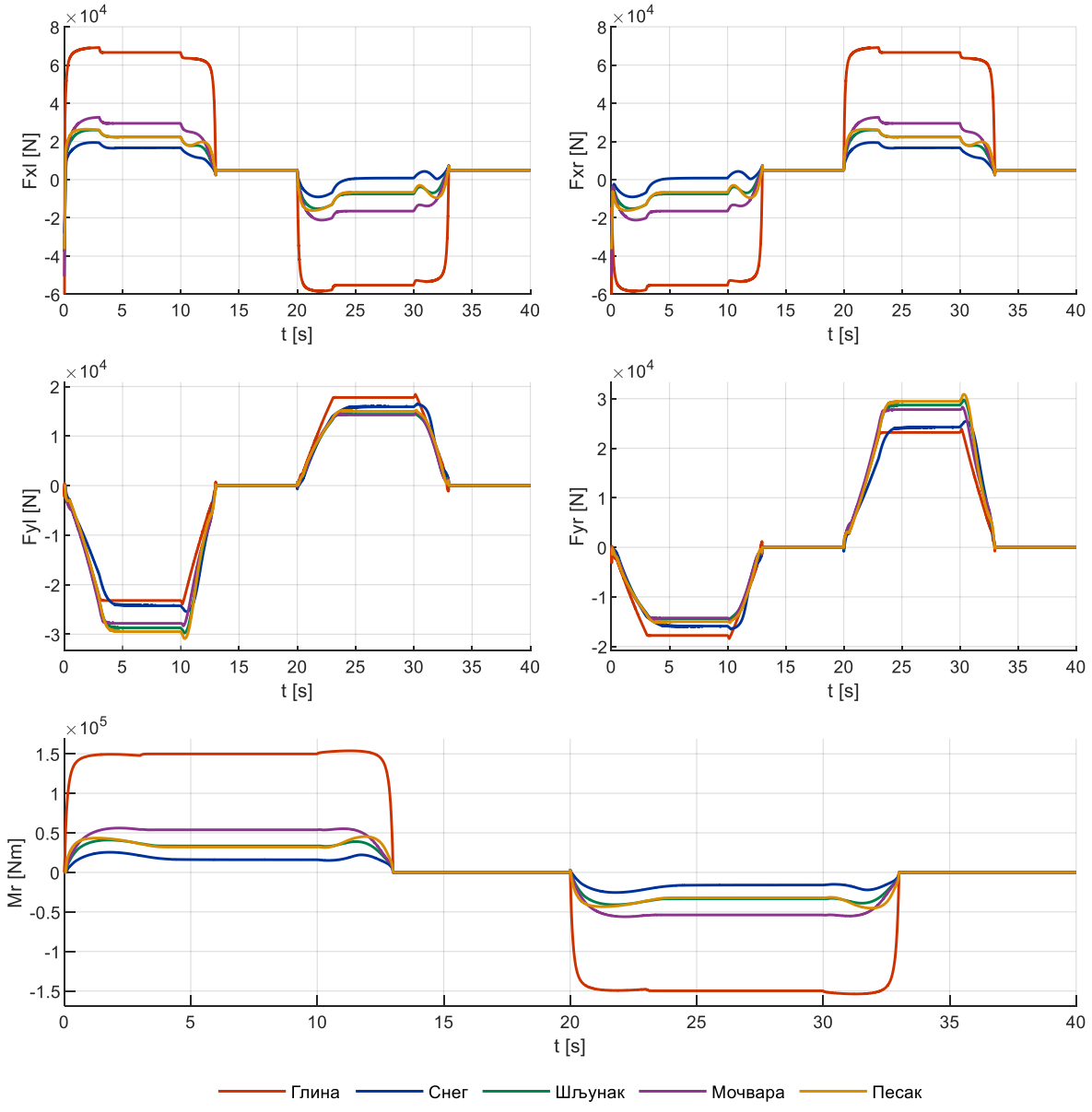
десно и у лево. Приказане су трајекторије кретања возила за пет различитих деформабилних подлога, а ради поређења, и идеална кинематичка трајекторија. Као и у претходном сценарију, уочено је да трајекторије добијене симулацијом значајно одступају од кинематичке трајекторије, што је најизраженије у фазама заокрета. У овом сценарију разлика симулиране и кинематичке трајекторије је веома изражена. Сама грешка у највећој мери је последица тренутка изласка возила из заокрета, односно у идеалном случају без клизања возило се и даље налази у заокрету.



Слика 5.14. Трајекторија возила у току сложеног кретања - II сценарио.

Анализом подужних контактних сила уочено је да оне прате наизменичне промене режима заокрета, при чему се током сваког маневра јављају карактеристичне промене

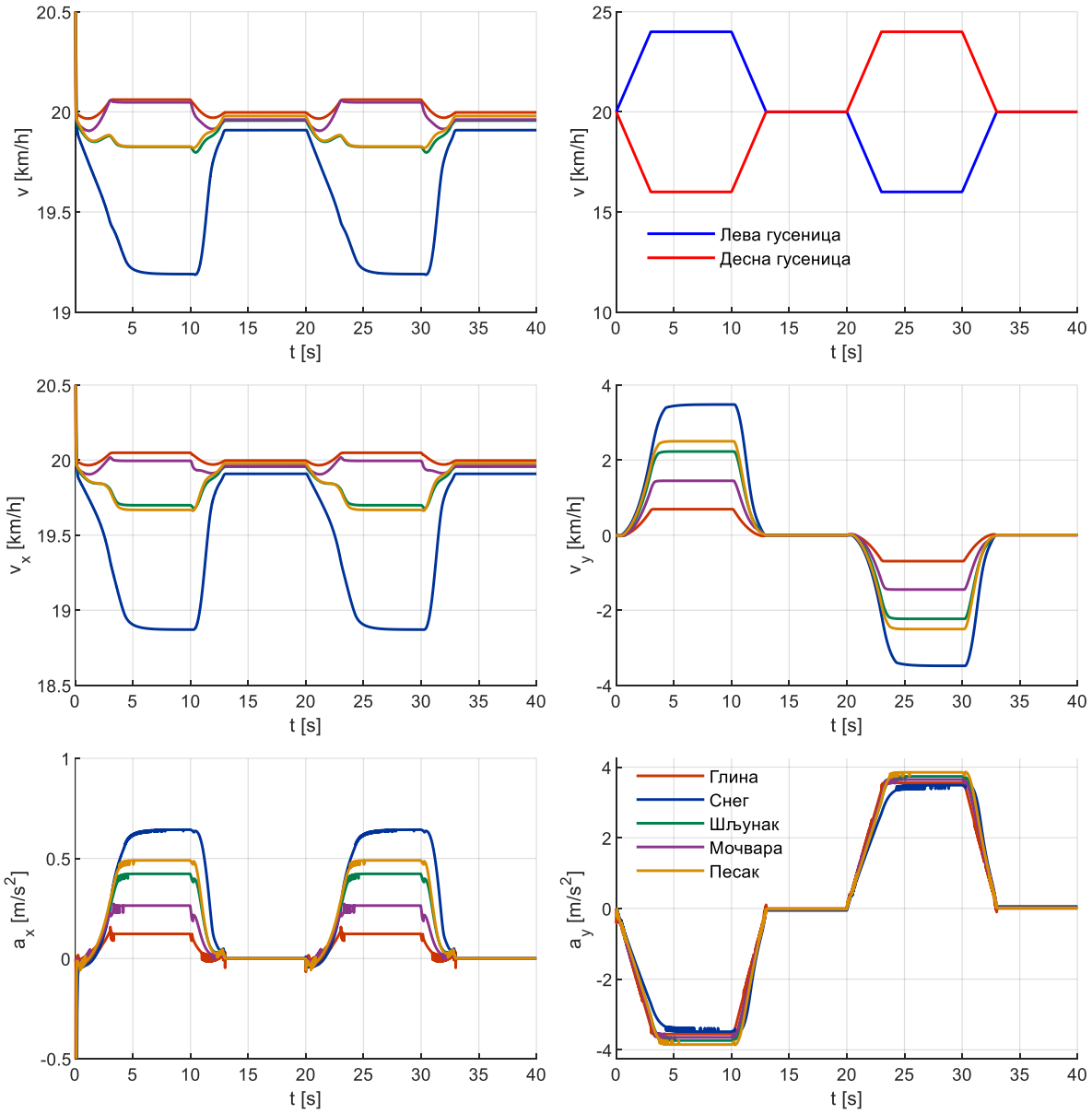
интензитета и знака сила. Као и у претходном сценарију, највеће вредности лонгитудиналних сила уочене су код подлоге - глина, што је последица веће носивости и способности подлоге да пренесе веће силе. Бочне контактне силе показују временски синхронизовану промену са заокретима возила, при чему је њихов карактер у складу са очекиваним физичким понашањем у току криволинијског кретања. Момент отпора заокрета јасно прати наизменичне маневре у десно и у лево, при чему су уочене веће вредности момента код подлога са већом носивошћу, што је и очекиван резултат.



Слика 5.15. Оптерећења која делују на возило у току сложеног кретања - II сценарио.

Анализом укупне брзине возила уочено је да се брзина ипак одржава на приближно константном нивоу у фазама криволинијског кретања, с обзиром да се ради о симетричном

систему за заокрет. Највећи пад брзине регистрован је код кретања по подлози снег, што је у складу са резултатима добијеним у претходним анализама. Подужна компонента брзине прати укупну брзину кретања, док бочна компонента мења знак у складу са променом смера заокрета. Приказана убрзања показују очекиван карактер, при чему су бочна убрзања израженија током маневара, док су у фазама праволинијског кретања занемарљива.



Слика 5.16. Промена брзине и убрзања возила у току сложеног кретања - II сценарио.

Приказани резултати показују да је развијени симулациони модел способан да са високим степеном физичке веродостојности предвиди трајекторију кретања гусеничног возила у току различитих маневара, укључујући праволинијско кретање, стабилне заокрете и сложене секвенце маневара са промењљивим режимима управљања. Добијене путање

показују значајно боље слагање са очекиваним реалним понашањем возила у поређењу са резултатима добијеним применом искључиво кинематичког модела, који не узима у обзир интеракцију гусеница и деформабилне подлоге. Посебно је уочено да кинематички модел у условима сложеног кретања доводи до систематског потцењивања радијуса заокрета, и прецењивања управљивости возила, што може резултирати нетачним предвиђањем путање.

Остварено унапређење симулационог модела је последица укључивања ефеката бочног клизања и проклизавања гусеница, као и веродостојног моделирања развоја контактних сила у интеракцији возила и подлоге. Ови ефекти показали су се као посебно значајни током маневара заокрета и у условима сложеног, временски променљивог кретања, где долази до изражене нелинеарне зависности између управљачких улаза и одзива система.

Иако добијени резултати указују на високу физичку конзистентност и нумеричку стабилност развијеног симулационог модела, важно је нагласити да модели овог типа захтевају додатну и темељну проверу путем експерименталних мерења, ради потпуне валидације њихове тачности. Посебан значај има упоређивање симулационих резултата са подацима добијеним у реалним условима кретања возила по различитим деформабилним подлогама, чиме би се омогућило прецизније подешавање параметара модела и даље унапређење његове применљивости.

Модели са способношћу прецизног предвиђања трајекторије кретања, контактних сила и кључних динамичких параметара, од суштинског су значаја за пројектовање система управљања који морају функционисати у условима ограничене управљивости и променљивих карактеристика подлоге. У том контексту, овакви симулациони алати представљају неопходан корак ка развоју поузданих аутономних гусеничних платформи.

Могућа примена развијеног модела огледа се у широком спектру области, укључујући транспорт у тешким теренским условима, војне и безбедносне примене, као и пољопривредну и грађевинску механизацију. Даљим развојем и експерименталном валидацијом, овакви модели могу значајно допринети унапређењу безбедности, ефикасности и поузданости савремених гусеничних возила.

5.3. Анализа осетљивости модела на промену конструкционих параметара возила

Анализа осетљивости представља важан корак у процени поузданости и робусности развијеног симулационог модела. У претходном поглављу кроз симулације кретања возила на различитим типовима подлога анализиран је утицај промене параметара подлоге на резултате модела. Због даље анализе, у овом поглављу представљен је утицај промене

конструкционих параметара возила на резултате симулације. Променом основних параметара, као што су маса возила, положај тежишта и геометријске карактеристике гусеница, могу настати значајне разлике у оствареним силама у контакту гусеница и подлоге, клизању, трајекторији кретања и стабилности возила током маневара.

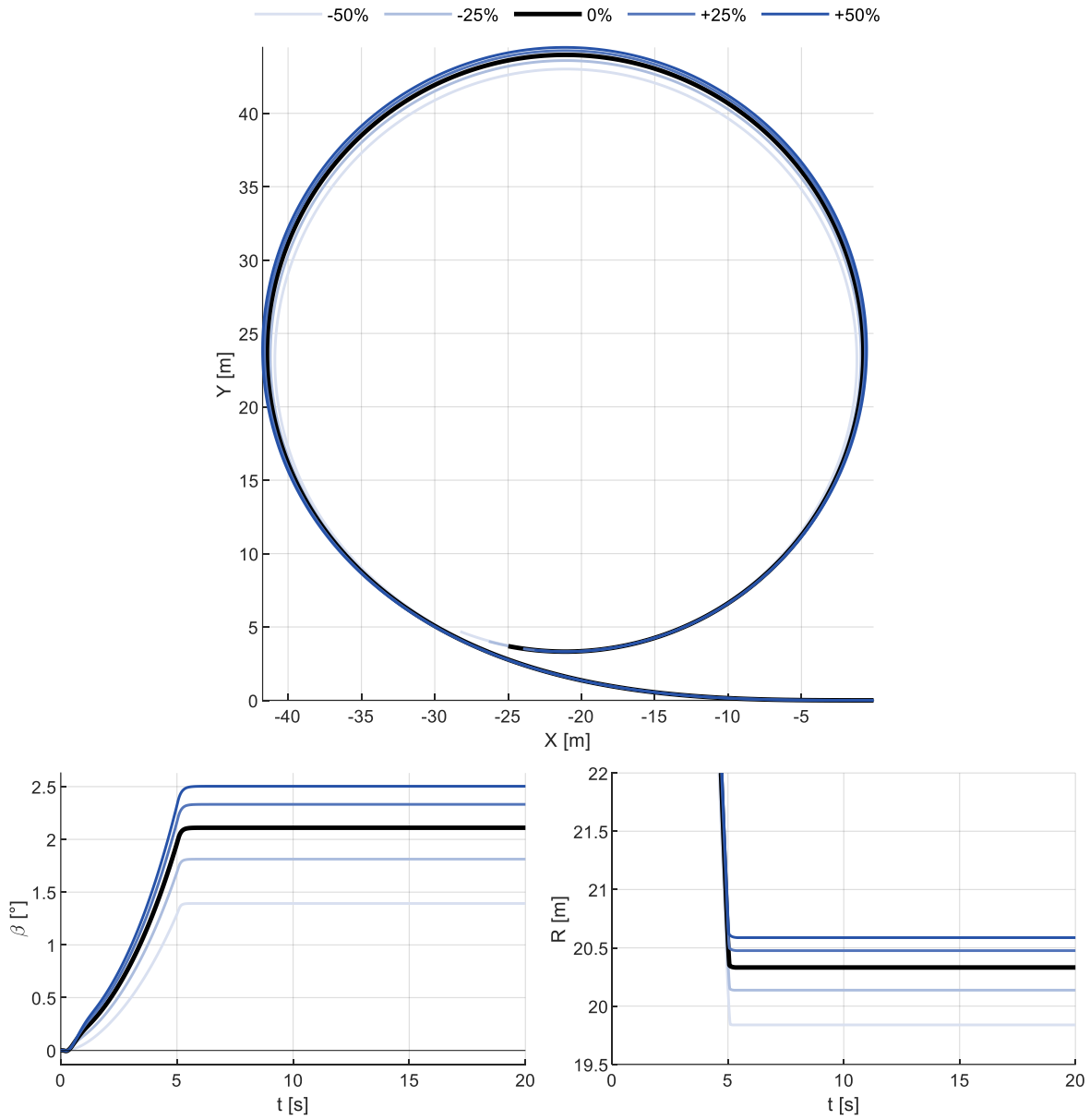
У оквиру овог поглавља спроведена је анализа осетљивости развијеног модела на промену најважнијих конструкционих параметара возила, са циљем да се утврди у којој мери варијације тих параметара утичу на понашање возила. Све симулације спроведене су за случај заокрета возила у десно, при чему су брзине гусеница идентичне као у поглављу где су представљени резултати кретања возила у условима стабилног заокрета. За параметре подлоге одабрани су они који се односе на влажну траву, и који су дати у табели 5.1. На овај начин постигнута је квалитетнија анализа, с обзиром да је тачност развијеног модела експериментално потврђена на наведеној подлози.

Конструкциони параметри возила, чији је утицај на резултате модела анализиран, су: маса возила, висина тежишта, момент инерције возила, ширина трага гусеница, ширина гусеница и дужина контакта гусеница. Вредност параметара је варирана у границама од -50% до $+50\%$. Наведене границе су коришћене за параметре који имају мањи утицај на резултате, док је за оне параметре чија, и мала промена битно утиче, модел тестиран у границама од -20% до $+20\%$.

Анализа је обухватила утицај промене параметара на трајекторију кретања, угао бочног клизања, радијус заокрета, контактне силе у подлози, момент отпора заокрету, као и кинематичке и динамичке величине кретања возила. Резултати ове анализе омогућавају боље разумевање физичке заснованости модела, идентификацију параметара са највећим утицајем на излазне величине, као и процену применљивости модела у ширем опсегу радних услова.

5.3.1. Маса возила

У циљу процене осетљивости развијеног симулационог модела на промену масе возила, спроведене су симулације у којима је номинална маса возила варирана у опсегу од -50% до $+50\%$, при чему су сви остали конструкциони, управљачки и терамеханички параметри задржани константним. Резултати спроведене анализе приказани су на сликама од 5.17 до 5.19.

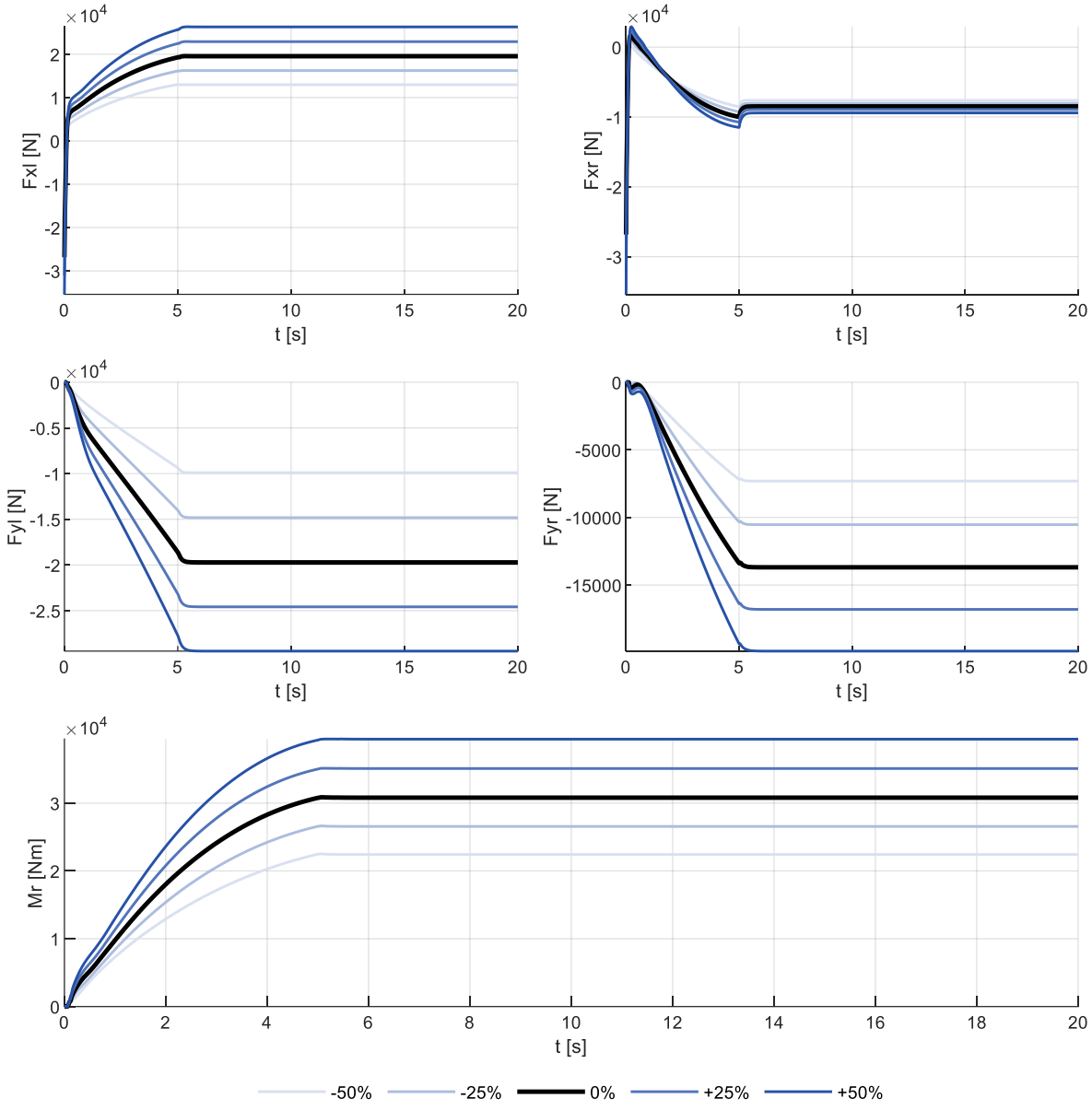


Слика 5.17. Утицај промене масе возила на трајекторију у току заокрета.

Резултати трајекторије приказани на слици 5.17 показују да промена масе возила има релативно мали утицај на облик трајекторије. Ипак, са повећањем масе возила долази до благог повећања радијуса заокрета возила, и обрнуто. Овакво понашање је директна последица промене нормалних реакција подлоге и расположивих бочних сила у контакту гусенице и тла.

Резултати промене угла бочног клизања возила показују јасан утицај масе возила. Са повећањем масе долази до пораста вредности угла бочног клизања, док је код лакших конфигурација возила овај угао мањи. Ова појава је у складу са физичким очекивањима, јер

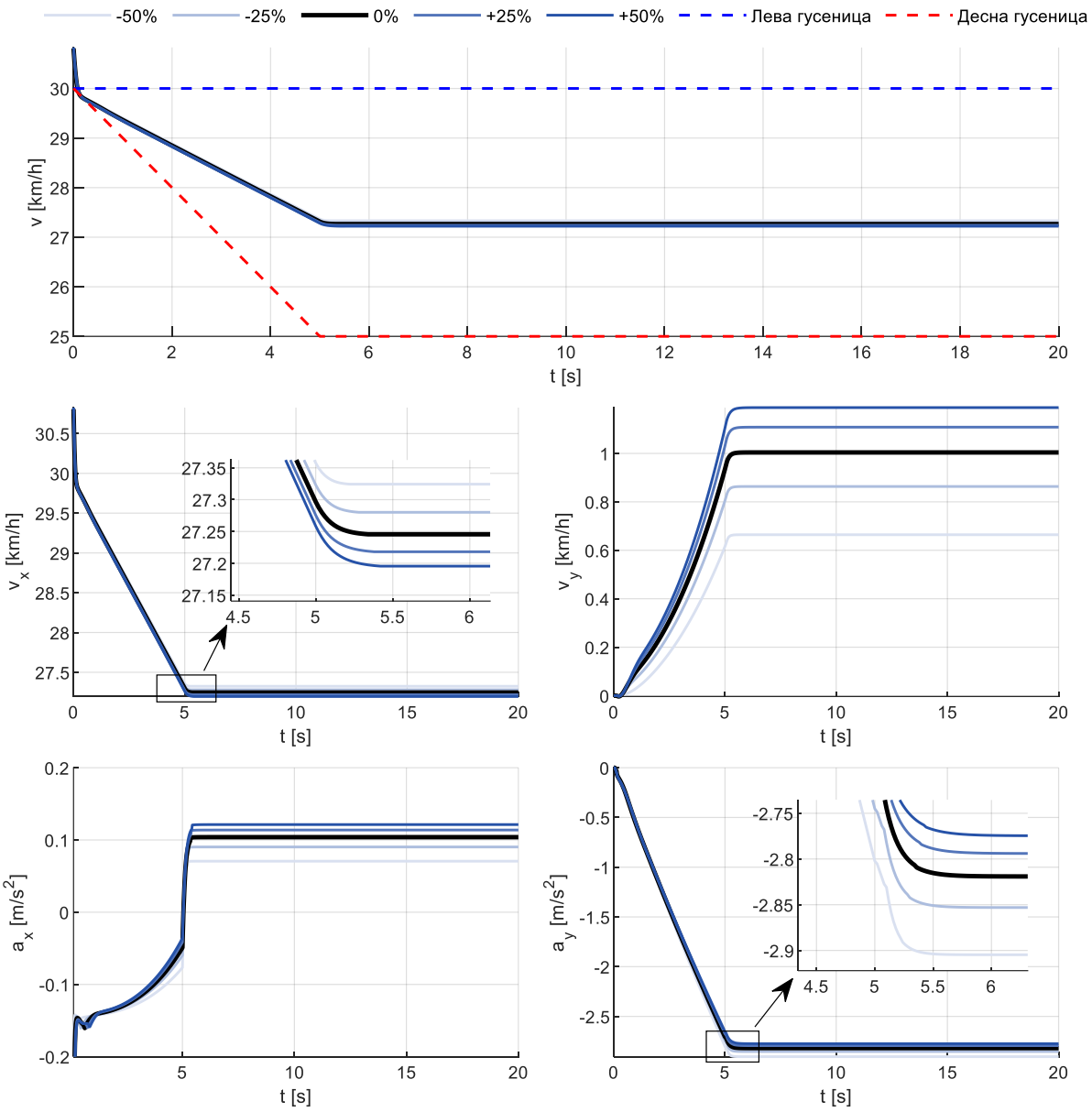
већа маса захтева развој већих бочних сила ради остварења исте угаоне брзине заокрета, што доводи до већег клизања у контакту гусенице и подлоге.



Слика 5.18. Утицај промене масе возила на оптерећења у току заокрета.

Промена масе има изражен утицај на контактне силе у подлози, како у уздужном, тако и у бочном правцу. Са повећањем масе возила долази до повећања уздужних сила на обе гусенице, што је последица већих нормалних реакција и већег отпора кретању. Такође, са порастом масе, апсолутне вредности бочних сила се значајно повећавају, што је директна последица потребе за већим центрипеталним убрзањем током заокрета. Истовремено, уочљива је асиметрија бочних сила између унутрашње и спољашње гусенице, што указује

на реалистично моделирање расподеле оптерећења и клизања током заокрета. Момент отпора заокрету показује велику зависност од масе возила.



Слика 5.19. Утицај промене масе возила на брзину и убрзања у току заокрета.

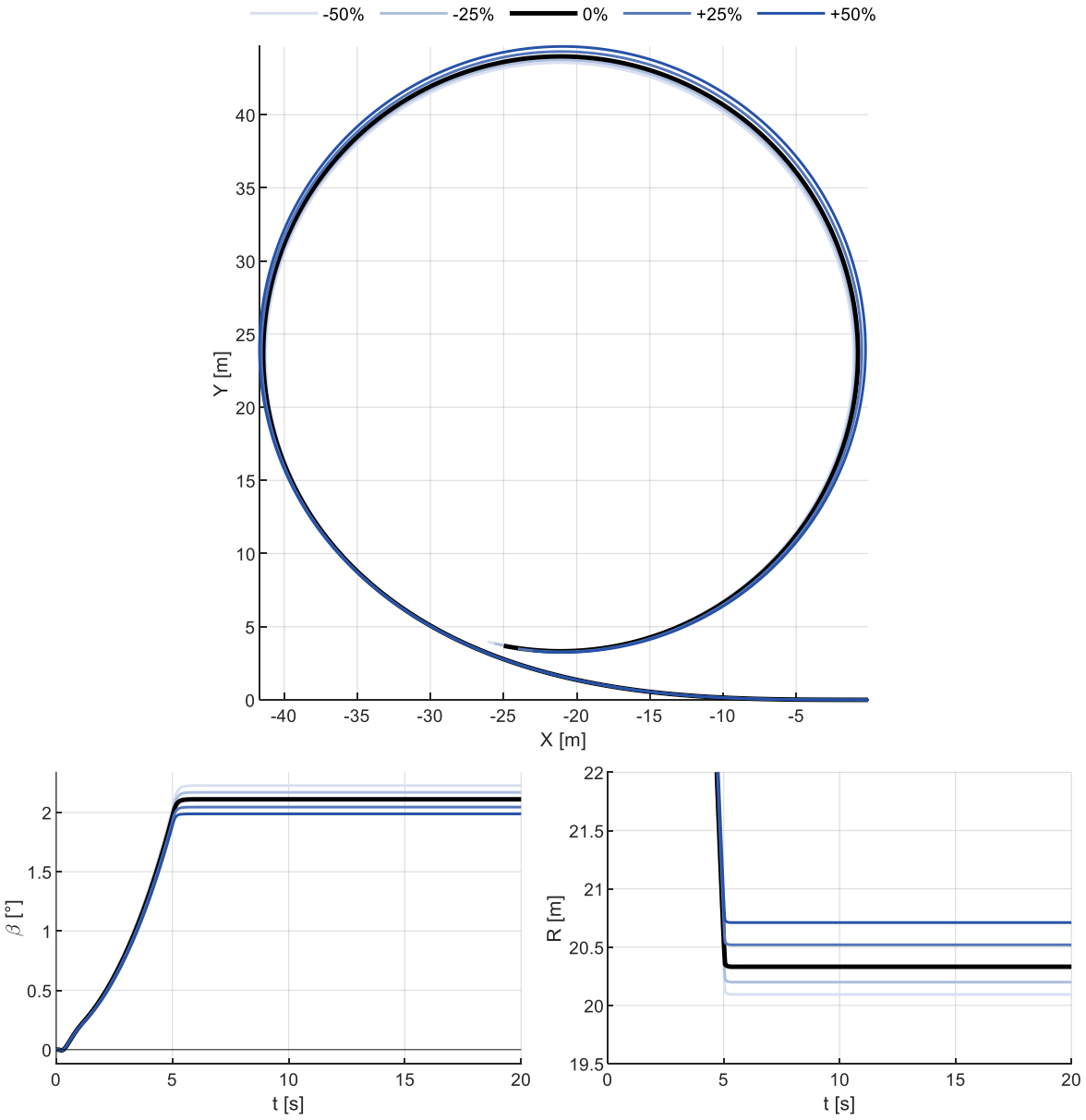
На основу добијених резултата може се закључити да развијени симулациони модел показује физички оправдану осетљивост на промену масе возила. Уочене промене у трајекторији, клизању, контактним силама и моменту отпора заокрету, у потпуности су у складу са теоријским очекивањима и познатим понашањем гусеничних возила.

Посебно је значајно што ни при екстремним варијацијама масе ($\pm 50\%$) није уочено нарушавање стабилности симулације, нити појава нереалних динамичких ефеката, што

указује на добру робусност и применљивост модела у широком опсегу експлоатационих услова.

5.3.2. Висина тежишта возила

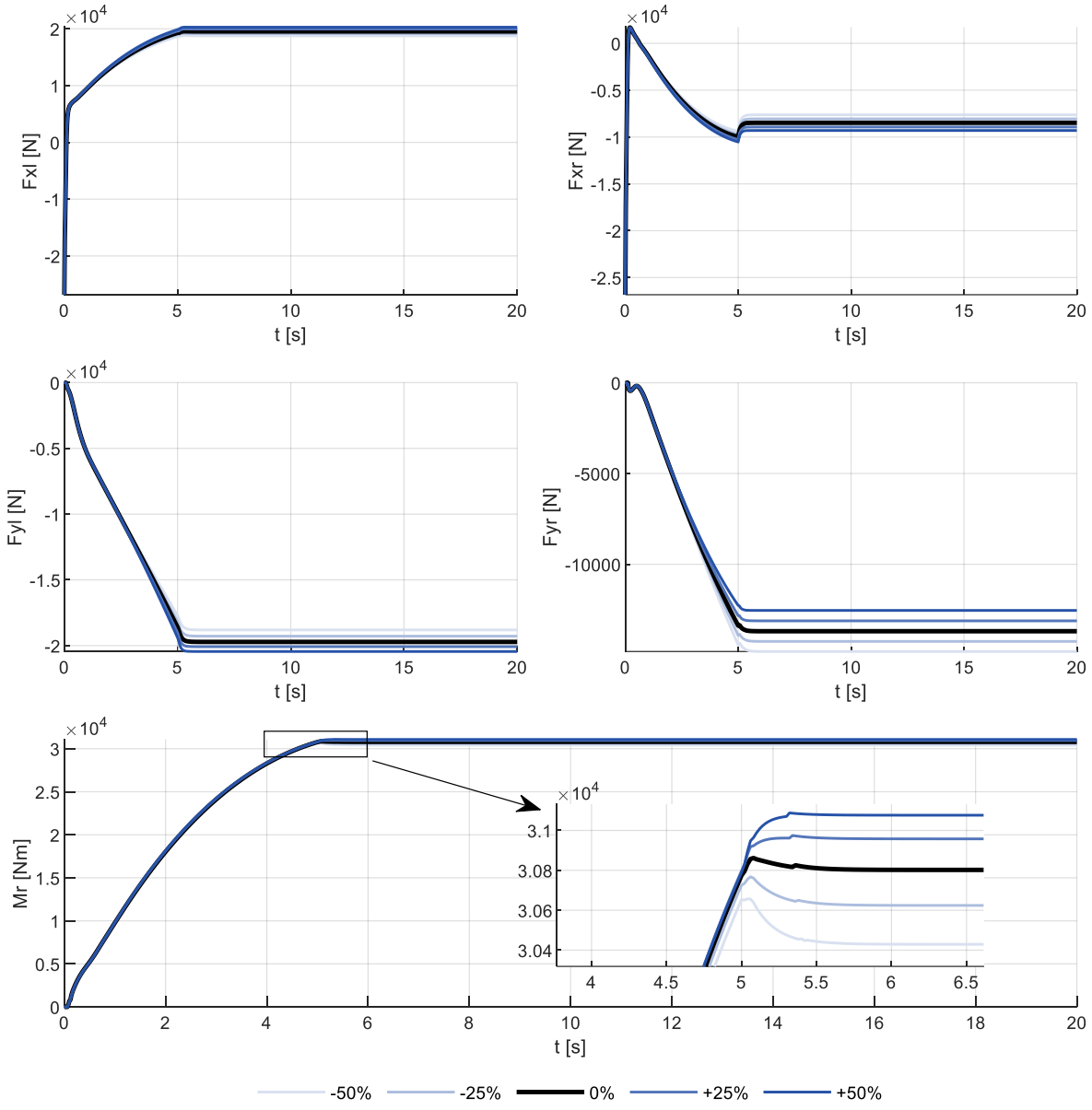
У циљу испитивања утицаја положаја тежишта на динамичко понашање гусеничног возила, спроведене су симулације у којима је висина тежишта варирана у опсегу од -50% до $+50\%$ у односу на номиналну вредност, док остали параметри модела нису мењани. Добијени резултати приказани су на сликама од 5.20 до 5.22.



Слика 5.20. Утицај промене висине тежишта на трајекторију у току заокрета.

Резултати трајекторије кретања показују да промена висине тежишта има веома мали утицај на облик и геометрију заокрета, при чему возило за све разматране положаје тежишта

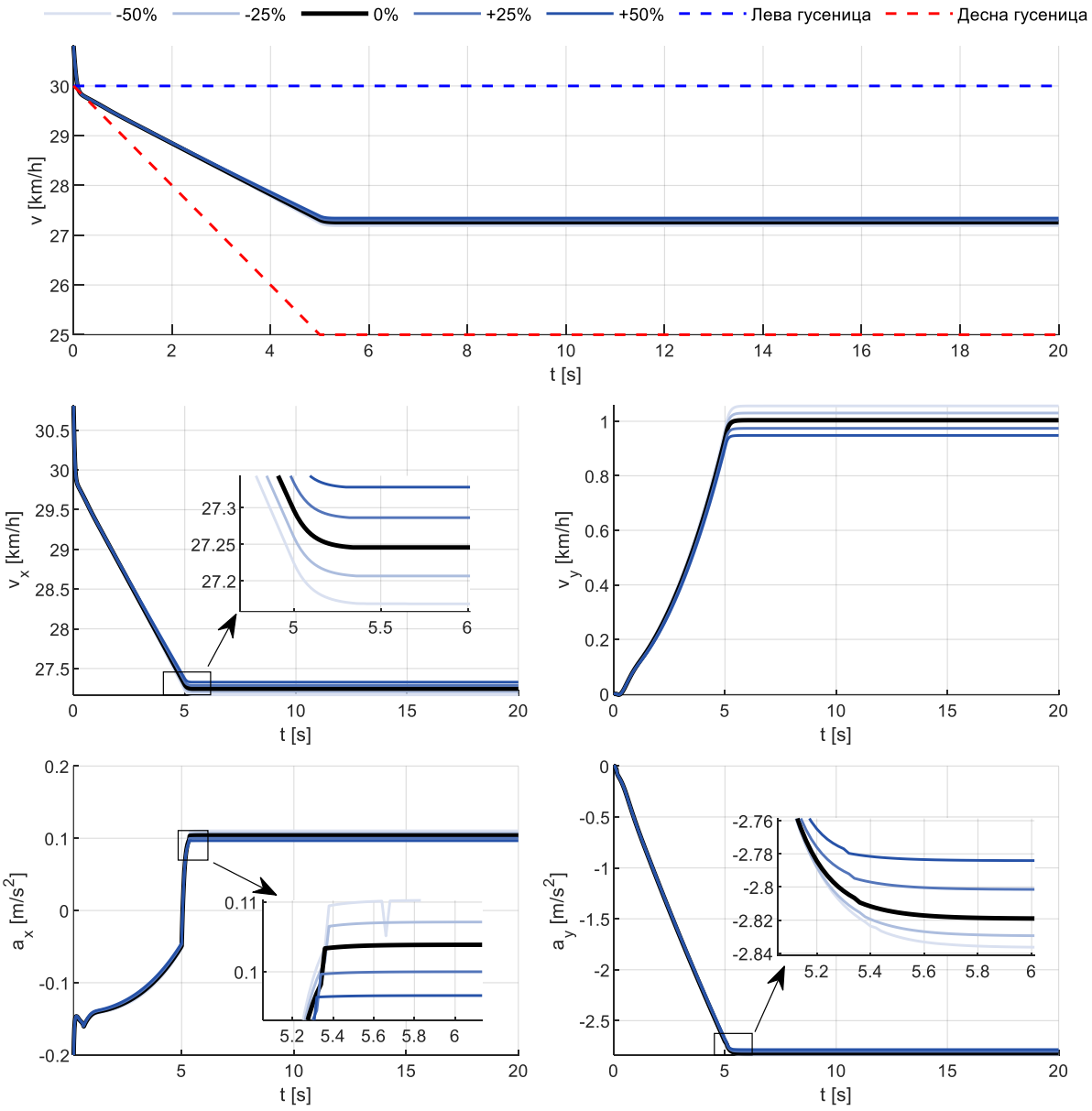
остварује готово идентичну трајекторију кретања. Са повећањем висине тежишта уочава се благ пораст вредности угла бочног клизања, као последица израженијег преноса оптерећења по ширини возила и мање ефикасног коришћења бочних сила у контакту гусенице и подлоге, док су разлике у полупречнику заокрета минималне.



Слика 5.21. Утицај промене висине тежишта на оптерећења у току заокрета.

Анализа контактних сила у подлози показује да промена висине тежишта има занемарљив утицај на уздужне силе на гусеницама. Вредности уздужних сила за све разматране конфигурације практично се поклапају, што је очекивано, имајући у виду да промена висине тежишта не утиче на укупну нормалну реакцију подлоге, већ искључиво на њену расподелу. Са друге стране, бочне силе показују нешто израженију зависност од

висине тежишта. Код већих висина тежишта долази до благог повећања апсолутних вредности бочних сила на спољашњој гусеници. Момент отпора заокрету показује релативно малу осетљивост на промену висине тежишта.



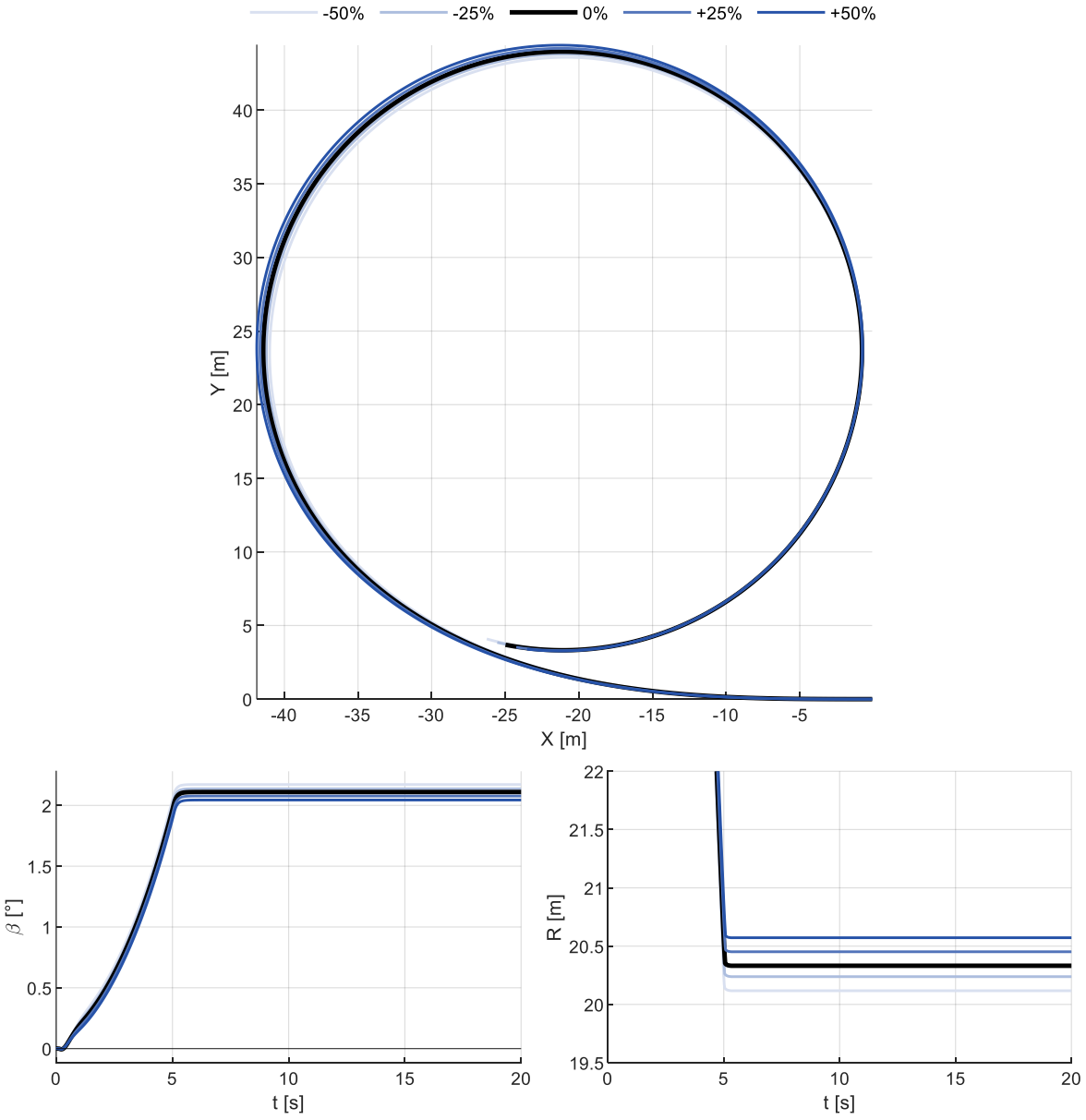
Слика 5.22. Утицај промене висине тежишта на брзину и убрзања у току заокрета.

Анализа брзина и убрзања показује да промена висине тежишта има занемарљив утицај на укупну и уздужну брзину кретања услед заокрета возила у описаним условима кретања, док бочна компонента брзине и убрзања показује минималне разлике без појаве осцилација или нестабилности, што указује да у разматраном опсегу не долази до нарушавања динамичке стабилности возила током заокрета.

Овакви резултати су у складу са физичким очекивањима и потврђују да је развијени модел способан да на реалистичан начин обухвати ефекте преноса оптерећења и стабилности возила, без појаве нереалних динамичких понашања, чак ни при екстремним варијацијама положаја тежишта.

5.3.3. Момент инерције возила

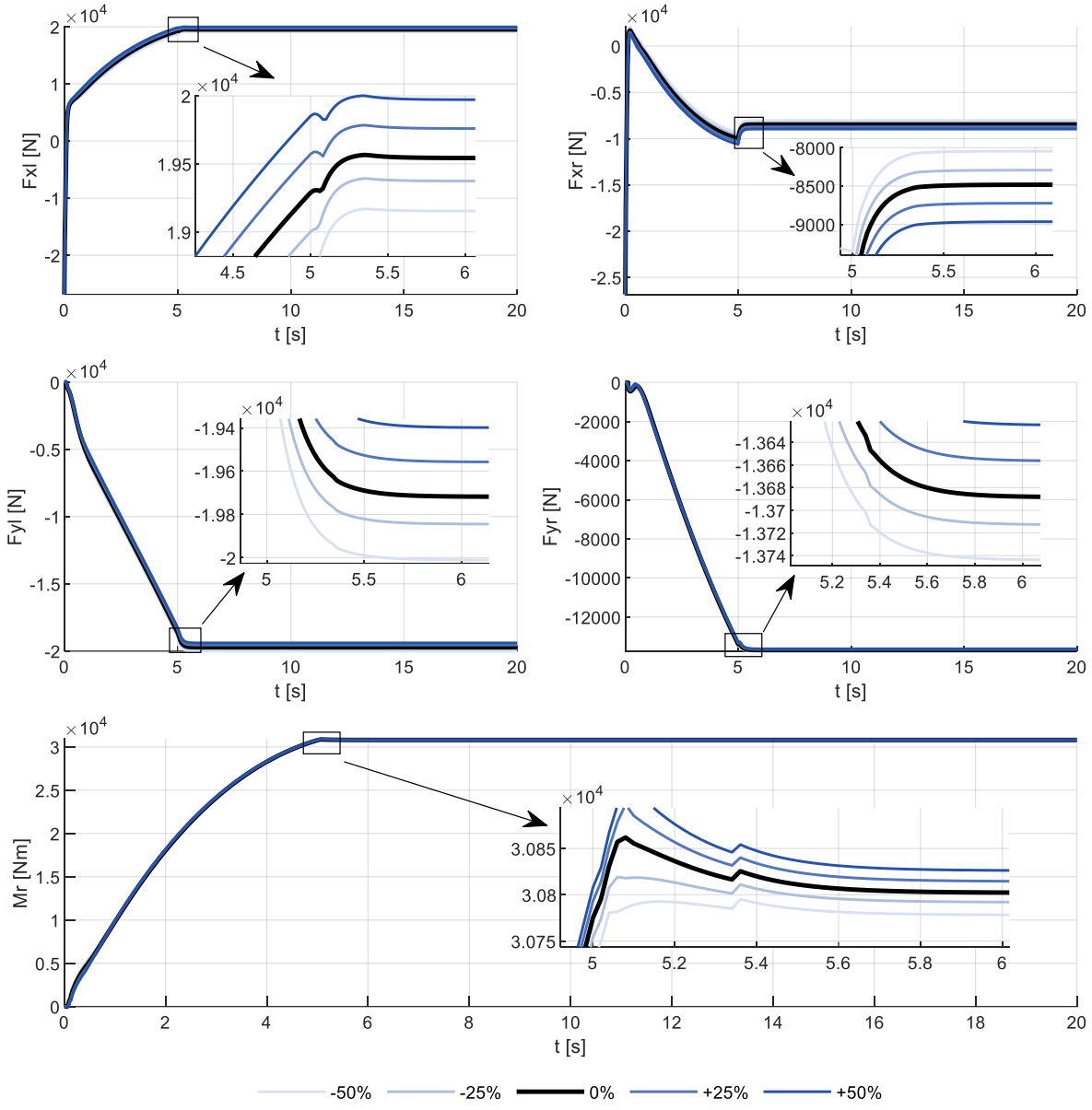
Момент инерције возила око вертикалне осе вариран је у опсегу од -50% до $+50\%$ у односу на номиналну вредност. Добијени резултати приказани су на сликама од 5.23 до 5.25.



Слика 5.23. Утицај промене момента инерције на трајекторију у току заокрета.

Резултати показују да промена момента инерције има занемарљив утицај на трајекторију и радијус заокрета возила. Утицај момента инерције испољава се углавном у

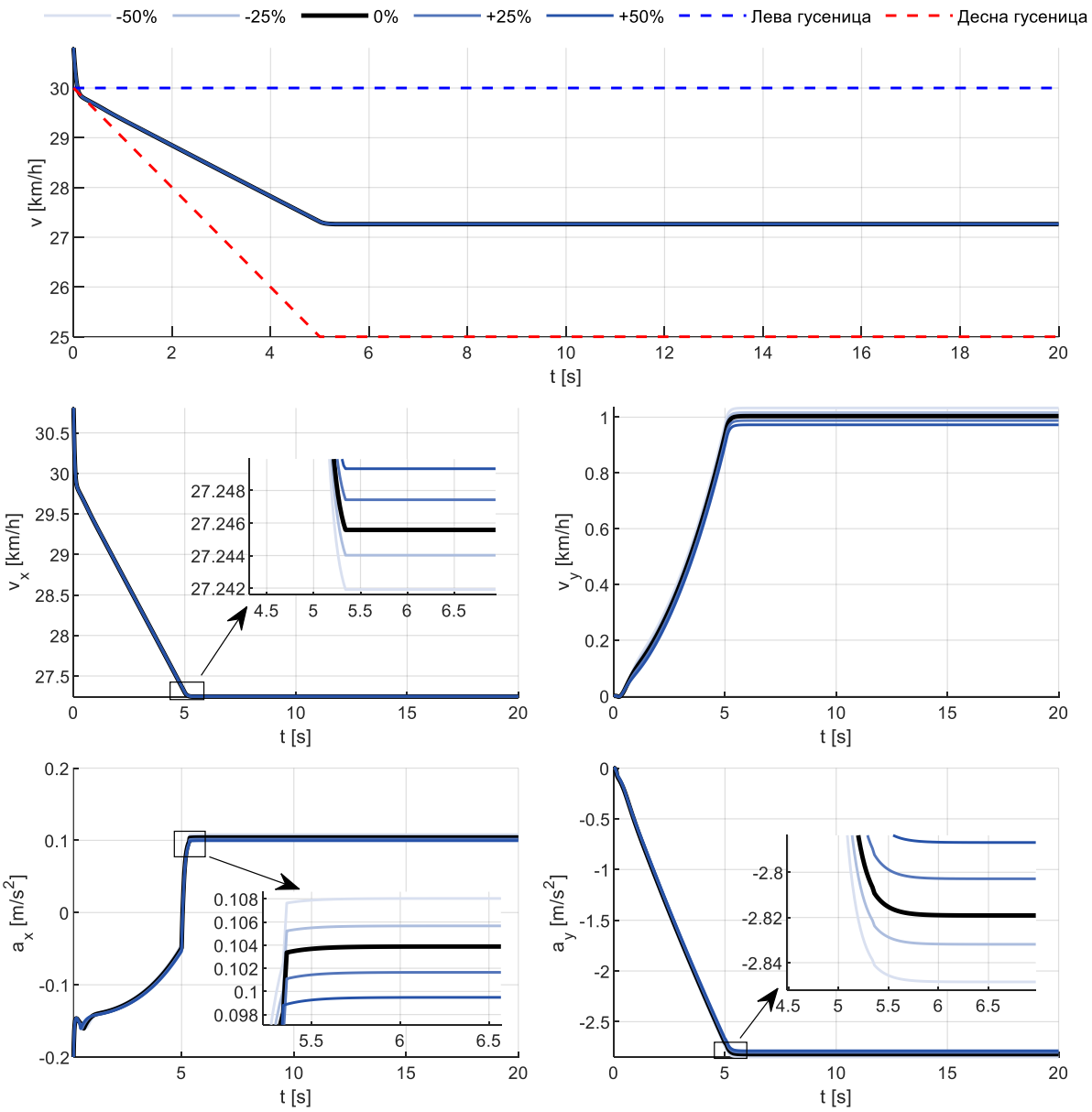
почетној фази маневра, где са повећањем момента инерције долази до релативно споријег пораста угла бочног клизања услед већег отпора угаоном убрзању.



Слика 5.24. Утицај промене момента инерције на оптерећења у току заокрета.

Анализа контактних сила у подлози показује да промена момента инерције има занемарљив утицај на подужне и бочне силе на гусеницама у стационарном режиму, при чему се вредности сила за различите конфигурације практично поклапају, што је очекивано, јер момент инерције не утиче директно на нормалне реакције подлоге. Утицај момента инерције испољава се углавном у почетној фази маневра кроз нешто спорији пораст бочних сила и момента отпора заокрету код већих вредности момента инерције, док су стационарне вредности ових величина практично исте.

Анализа брзина и убрзања показује да промена момента инерције нема значајан утицај на укупну и уздужну брзину кретања возила, док бочна компонента брзине и убрзања показује минималне разлике. Односно, долази до благог смањења бочне брзине возила услед повећања момента инерције возила.

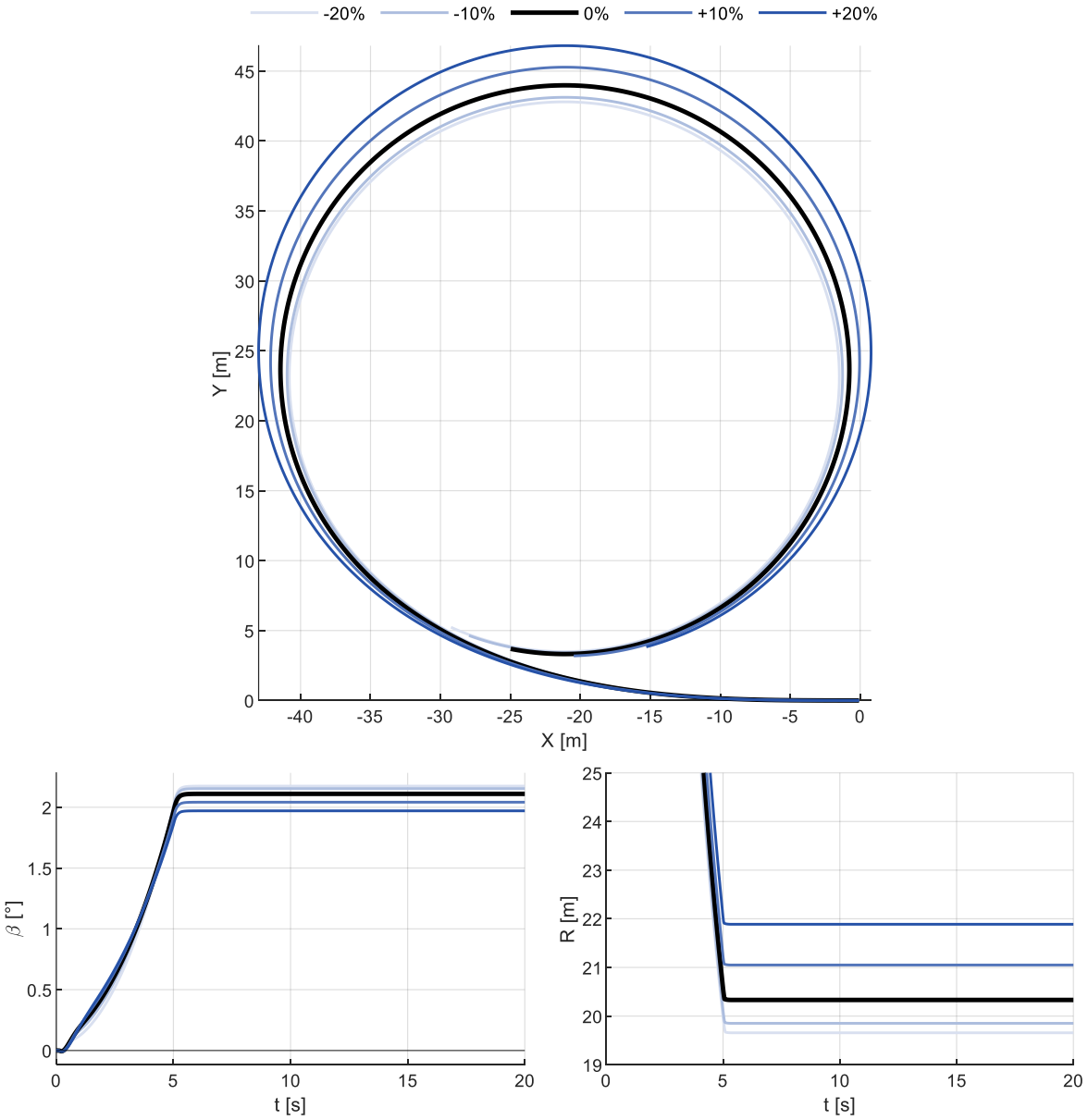


Слика 5.25. Утицај промене момента инерције на брзину и убрзања у току заокрета.

Резултати потврђују физичку заснованост модела и његову способност да стабилно и реалистично опише динамичко понашање возила у условима значајних варијација вредности момента инерције возила.

5.3.4. Ширина трага возила

Утицај промене ширине трага возила анализиран је симулацијама у којима је овај параметар вариран у опсегу од -20% до $+20\%$, а резултати су приказани на сликама од 5.26 до 5.28.

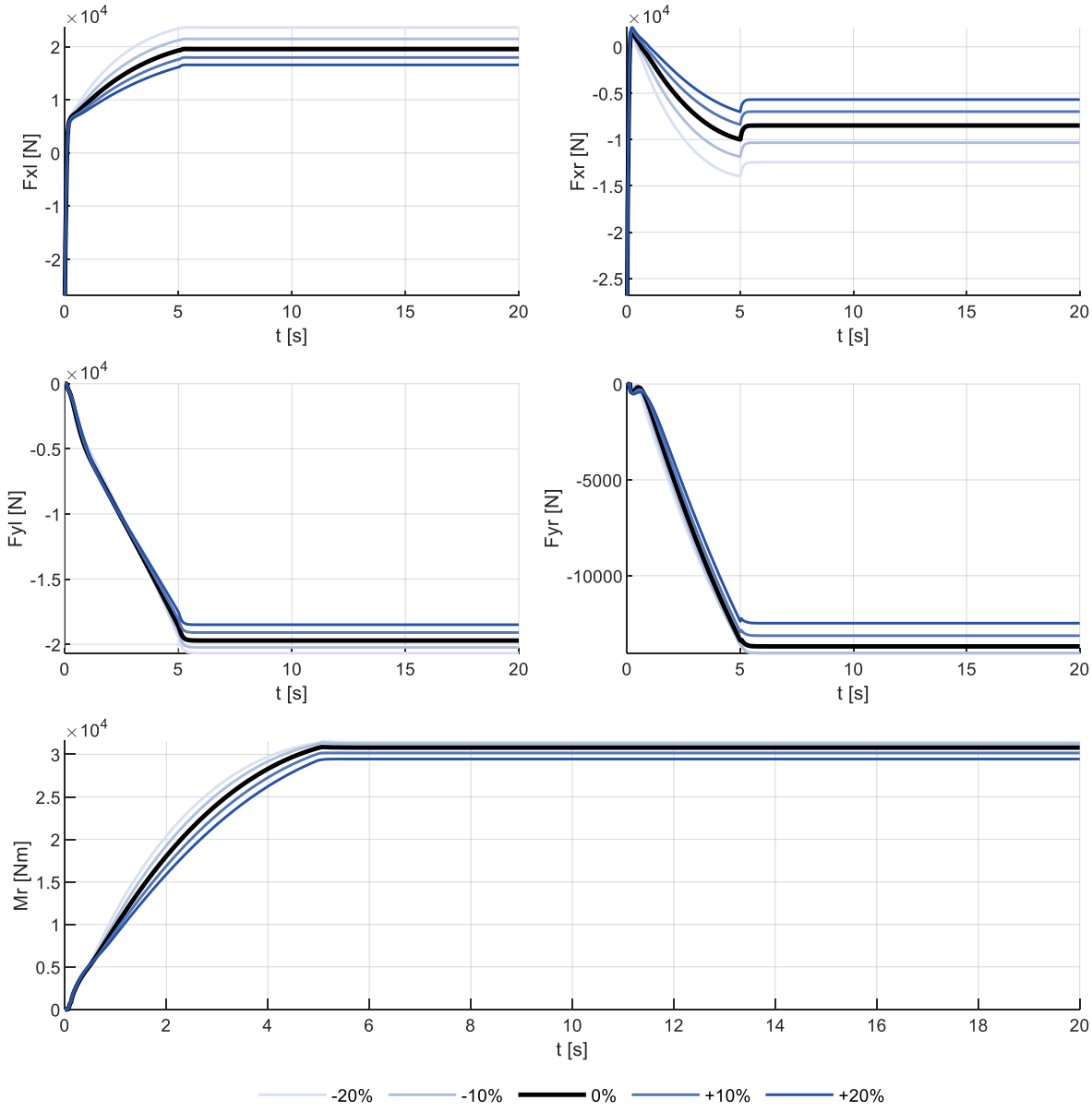


Слика 5.26. Утицај промене ширине трага возила на трајекторију у току заокрета.

Резултати трајекторије кретања показују да промена ширине трага има јасан утицај на геометрију заокрета возила. Са повећањем ширине трага долази до повећања радијуса заокрета, док смањење ширине трага доводи до израженијег заокретања и мањег радијуса заокрета. Овакво понашање је директна последица промене односа између брзина гусеница и кинематике заокрета.

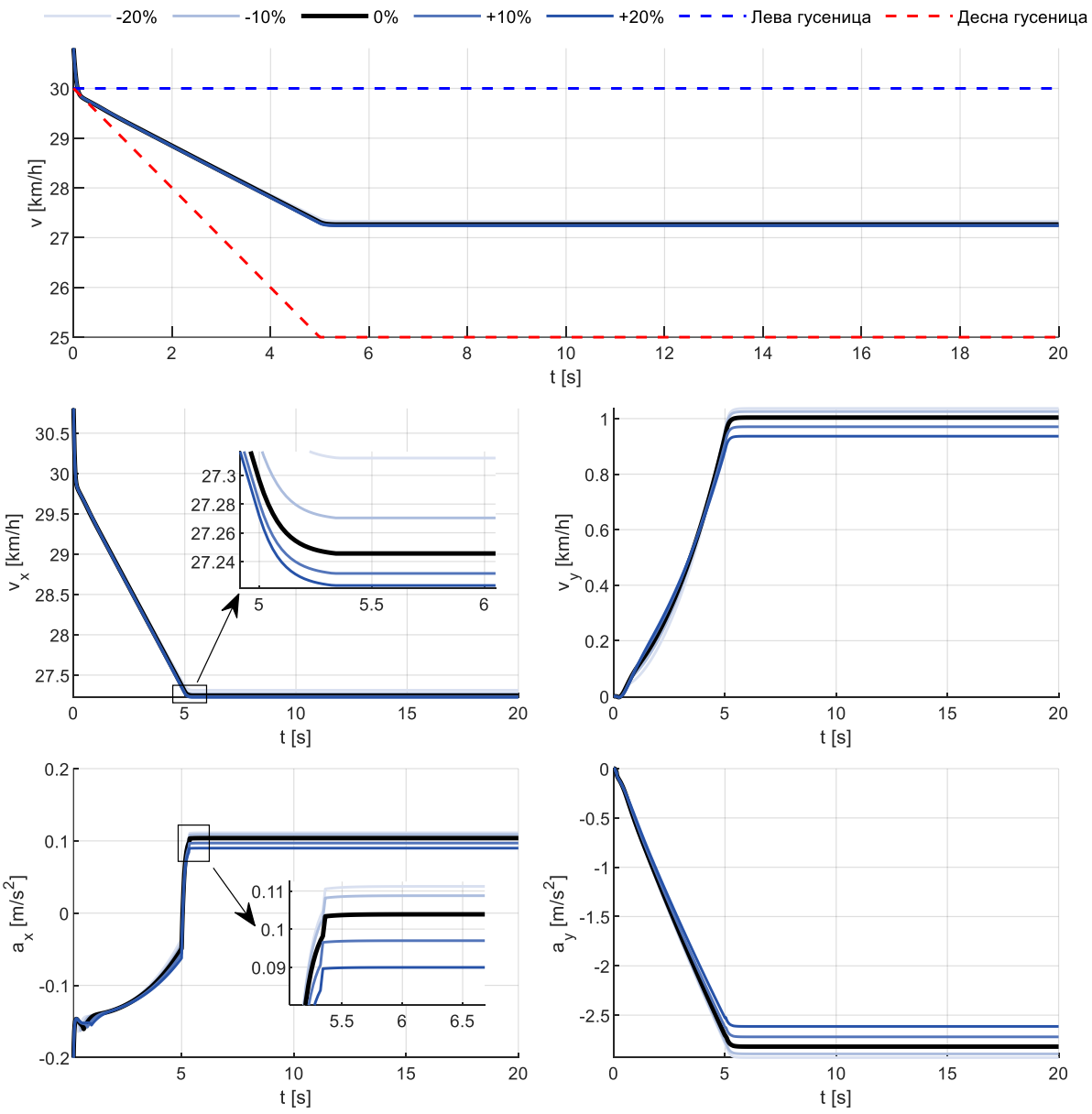
Промена ширине трага има уочљив утицај и на угао бочног клизања возила. Са смањењем ширине трага уочава се нешто већа вредност угла бочног клизања, док већа ширина трага доводи до његовог смањења. Ова појава је последица другачије расподеле бочних сила и промене услова клизања у контакту гусенице и подлоге.

Анализа контактних сила у подлози показује да промена ширине трага има уочљив утицај. Са повећањем ширине трага долази до повећања подужне силе на унутрашњој гусеници и смањења на спољашњој. Такође, са повећањем ширине трага долази и до смањења апсолутних вредности бочних сила, што је у складу са мањим вредностима бочног угла клизања и већим радијусом заокрета.



Слика 5.27. Утицај промене ширине трага возила на оптерећења у току заокрета.

Момент отпора заокрету показује јасну зависност од ширине трага, при чему већа ширина трага доводи до смањења потребног момента за остваривање истог маневра заокрета. Анализа брзина и убрзања показује да промена ширине трага нема значајан утицај на укупну и уздужну брзину кретања возила, што је последица управљања путем задатих брзина гусеница. Бочна компонента брзине и убрзања показује уочљиве разлике, при чему мања ширина трага доводи до нешто већих бочних брзина и убрзања.



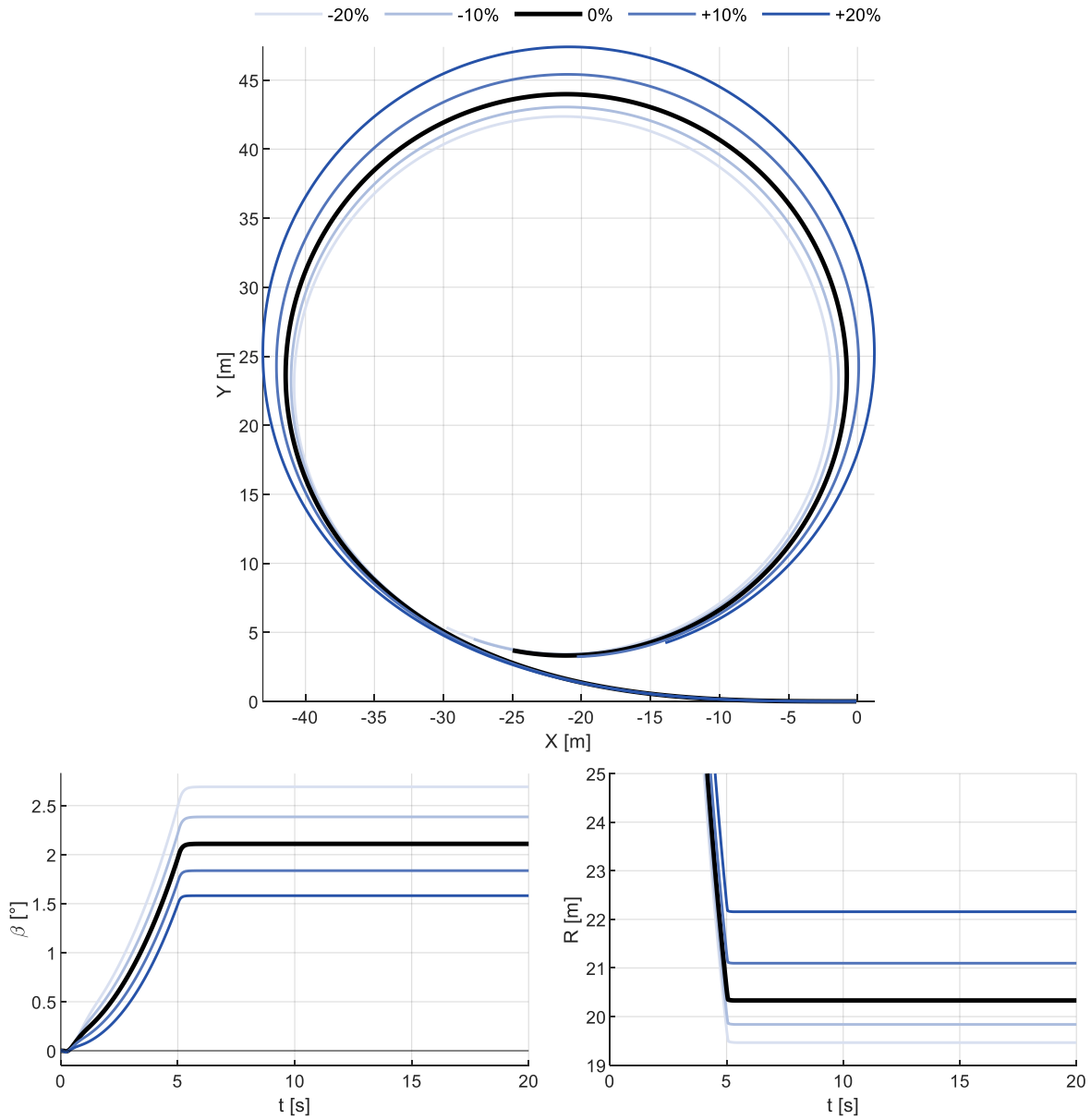
Слика 5.28. Утицај промене ширине трага возила на брзину и убрзања у току заокрета.

На основу добијених резултата може се закључити да ширина трага возила има значајан утицај на геометрију заокрета и расподелу бочних сила, док је њен утицај на уздужну динамику ограничен. Добијени резултати су у складу са физичким очекивањима и показују

да развијени симулациони модел на реалистичан начин описује утицај ширине трага на динамичко понашање гусеничног возила.

5.3.5. Дужина контакта гусенице и подлоге

Промена дужине контакта гусенице са подлогом анализирана је кроз серију симулација у којима је овај параметар вариран у опсегу од -20% до $+20\%$, док су остали услови задржани непромењени. Резултати анализе приказани су на сликама од 5.29 до 5.31.

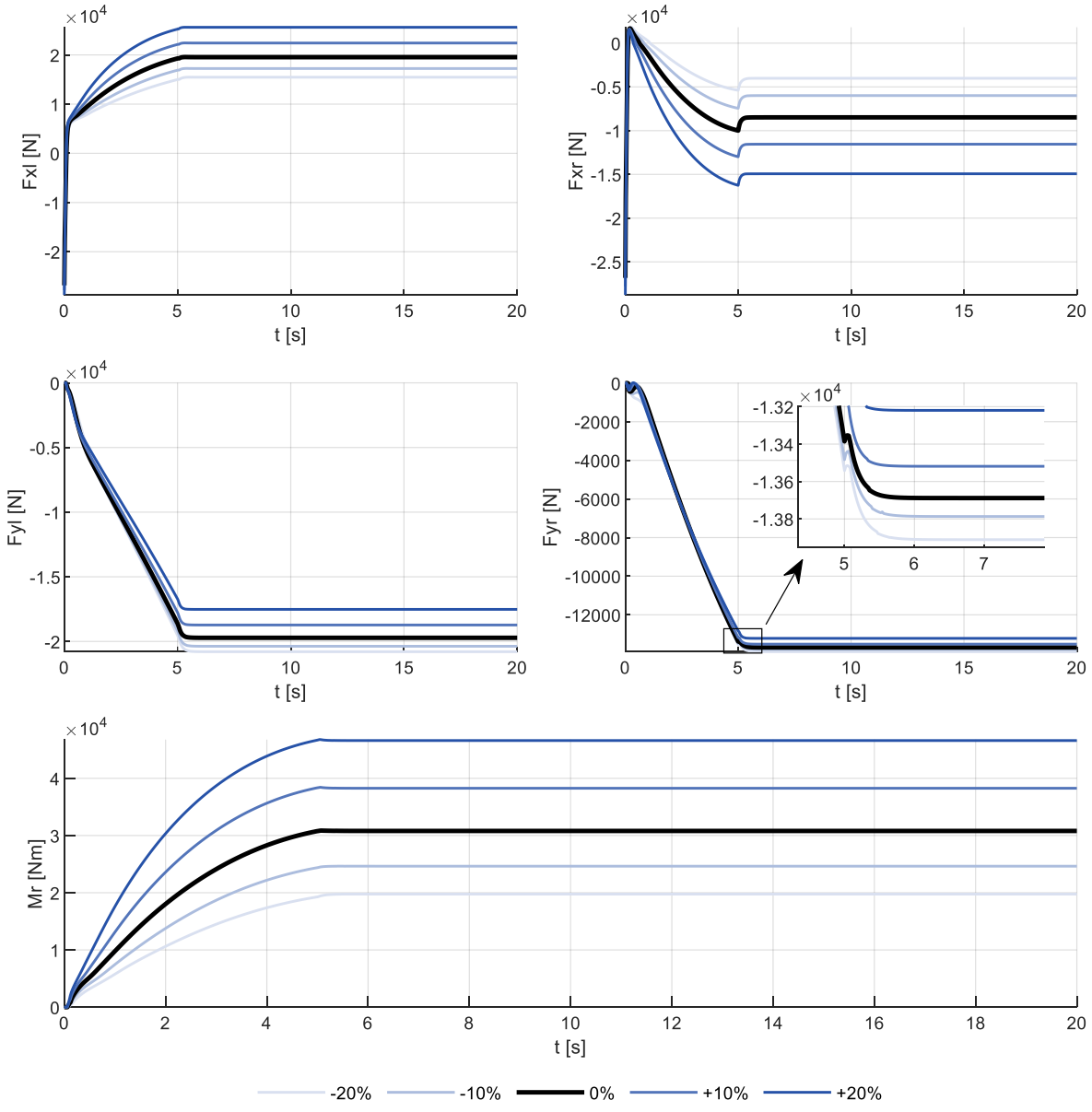


Слика 5.29. Утицај промене дужине контакта гусенице и подлоге на трајекторију у току заокрета.

Резултати показују да промена дужине контакта има велики утицај на геометрију заокрета возила. Са повећањем дужине контакта гусенице са подлогом долази до повећања

радијуса заокрета. Промена дужине контакта јасно утиче и на бочни угао клизања возила. Са повећањем дужине контакта уочава се смањење вредности угла бочног клизања, док је супротно овај угао већи, што указује на израженије клизање током маневра.

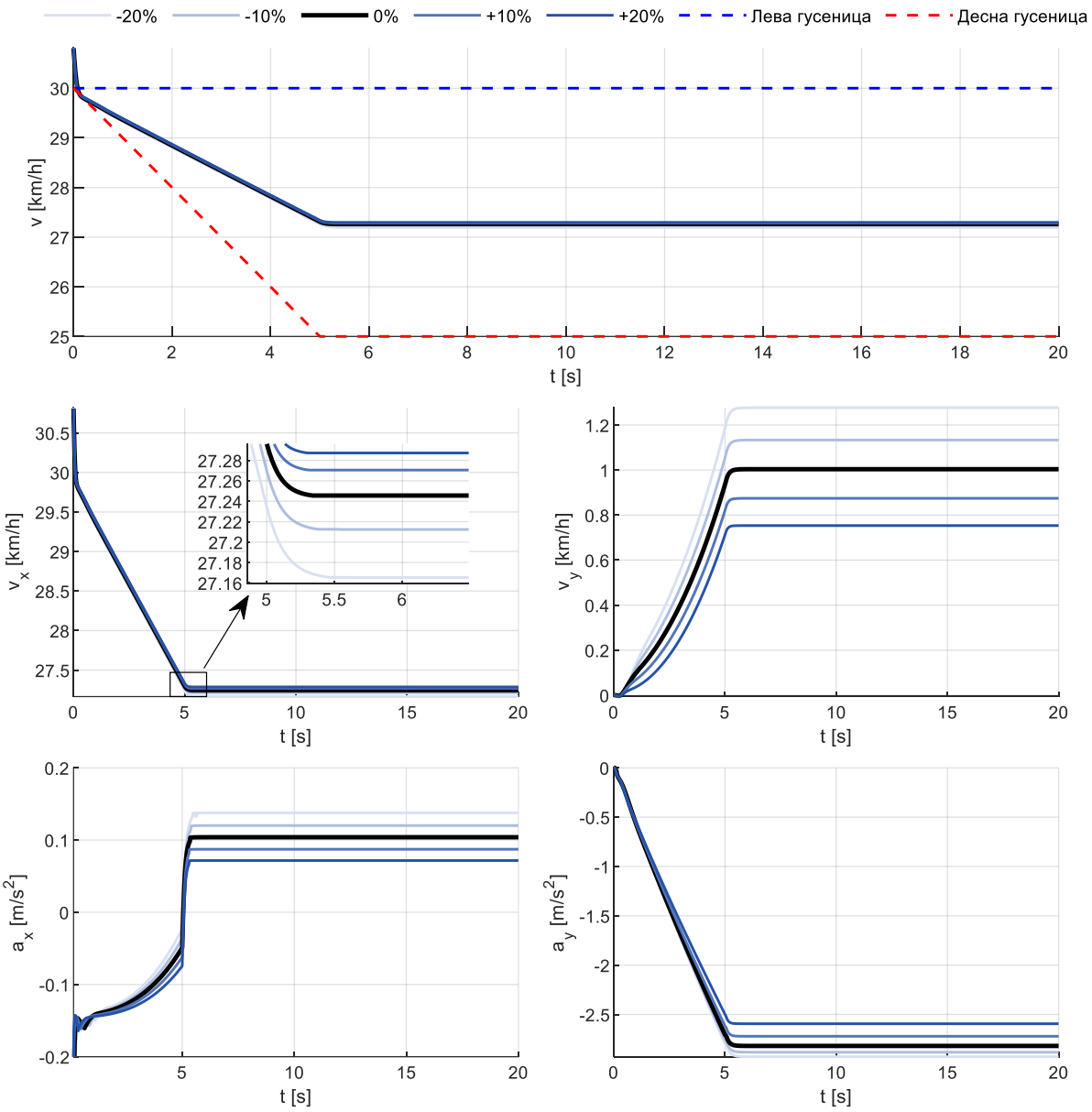
Анализа контактних сила показује да промена дужине контакта гусенице са подлогом има значајан утицај, пре свега на подужне силе. Супротно од повећања ширине трага возила, у случају повећања дужине контакта гусеница са подлогом долази до смањења подужне силе на унутрашњој гусеници и повећања на спољашњој. Са повећањем дужине контакта долази до смањења апсолутних вредности бочних сила на гусеницама, што је у складу са мањим бочним углом клизања и стабилнијим кретањем возила.



Слика 5.30. Утицај промене дужине контакта гусенице и подлоге на оптерећења у току заокрета.

Анализа момента отпора заокрету возила показује да промена дужине контакта гусенице са подлогом има изражен утицај на његову вредност. Са повећањем дужине контакта долази до значајног повећања вредности отпорног момента заокрету.

Анализа брзина и убрзања показује да промена дужине контакта гусенице са подлогом нема значајан утицај на укупну и уздужну брзину кретања возила. Бочна компонента брзине и убрзања показује нешто веће вредности код мање дужине контакта, што је последица већег бочног клизања, док код веће дужине контакта долази до њиховог смањења.

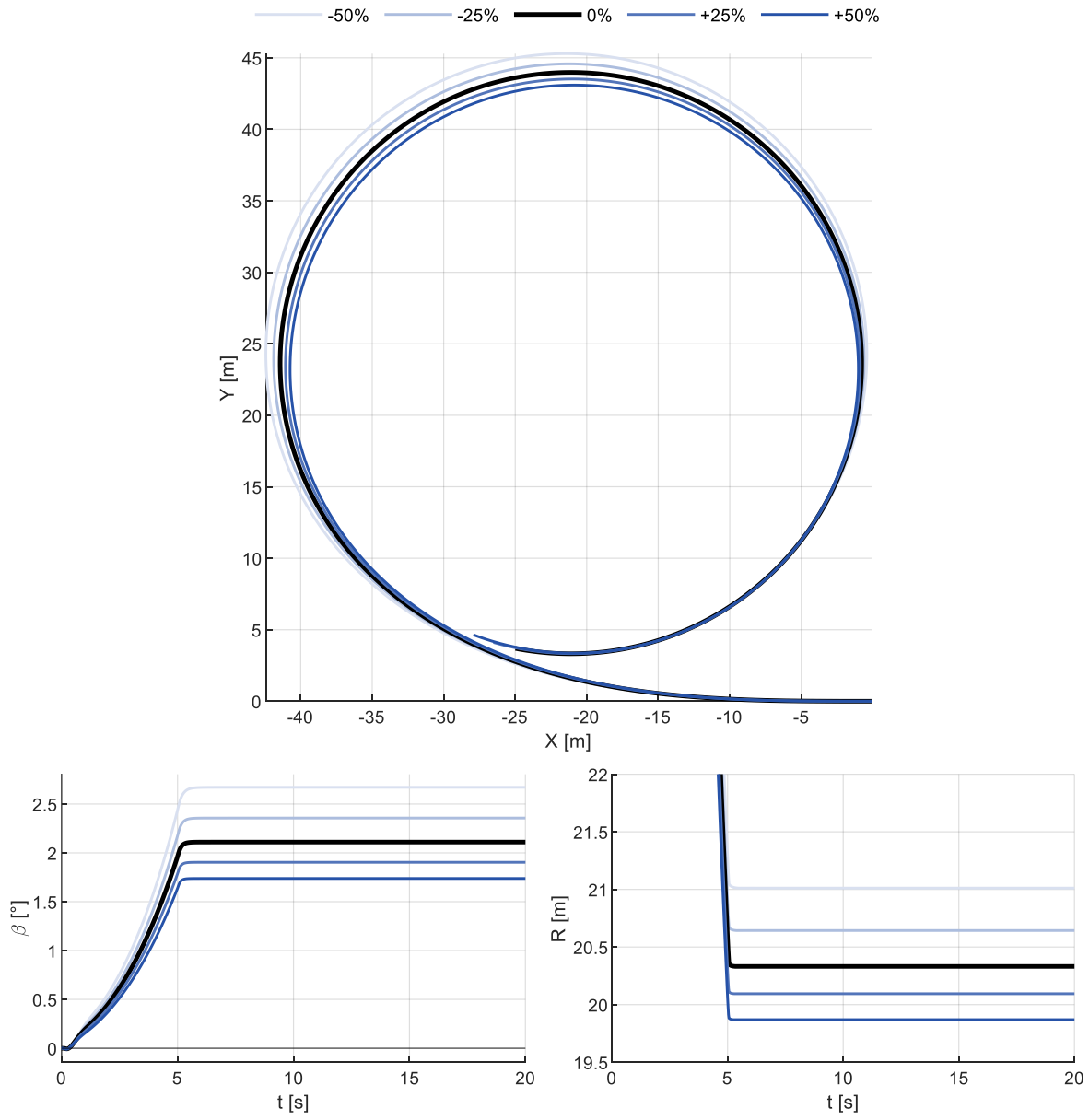


Слика 5.31. Утицај промене дужине контакта гусенице и подлоге на брзину и убрзања у току заокрета.

Приказани резултати су у складу са физичким очекивањима и показују да дужина контакта гусенице са подлогом утиче пре свега на клизање и геометрију заокрета, док је њен утицај на уздужну динамику ограничен.

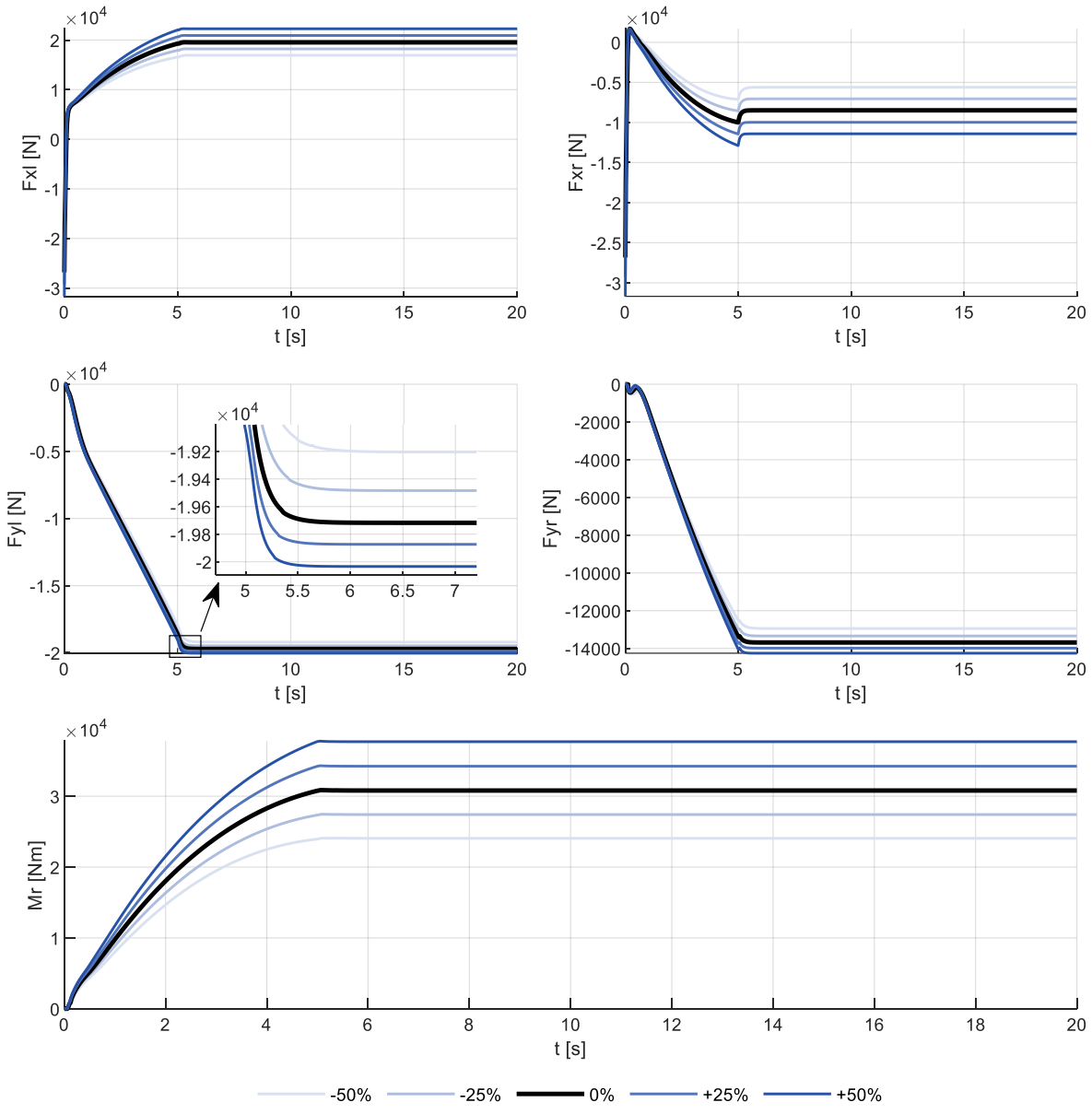
5.3.6. Ширина гусенице

Резултати показују да ширина контакта гусенице са подлогом утиче на геометрију заокрета, при чему већа ширина гусенице доводи до смањења радијуса кретања. Истовремено, са повећањем ширине контакта долази до смањења бочног угла клизања возила, док је код уже контактне зоне клизање израженије. Овакво понашање указује да ширина контакта има важну улогу у бочној динамици возила (слике од 5.32 до 5.34).



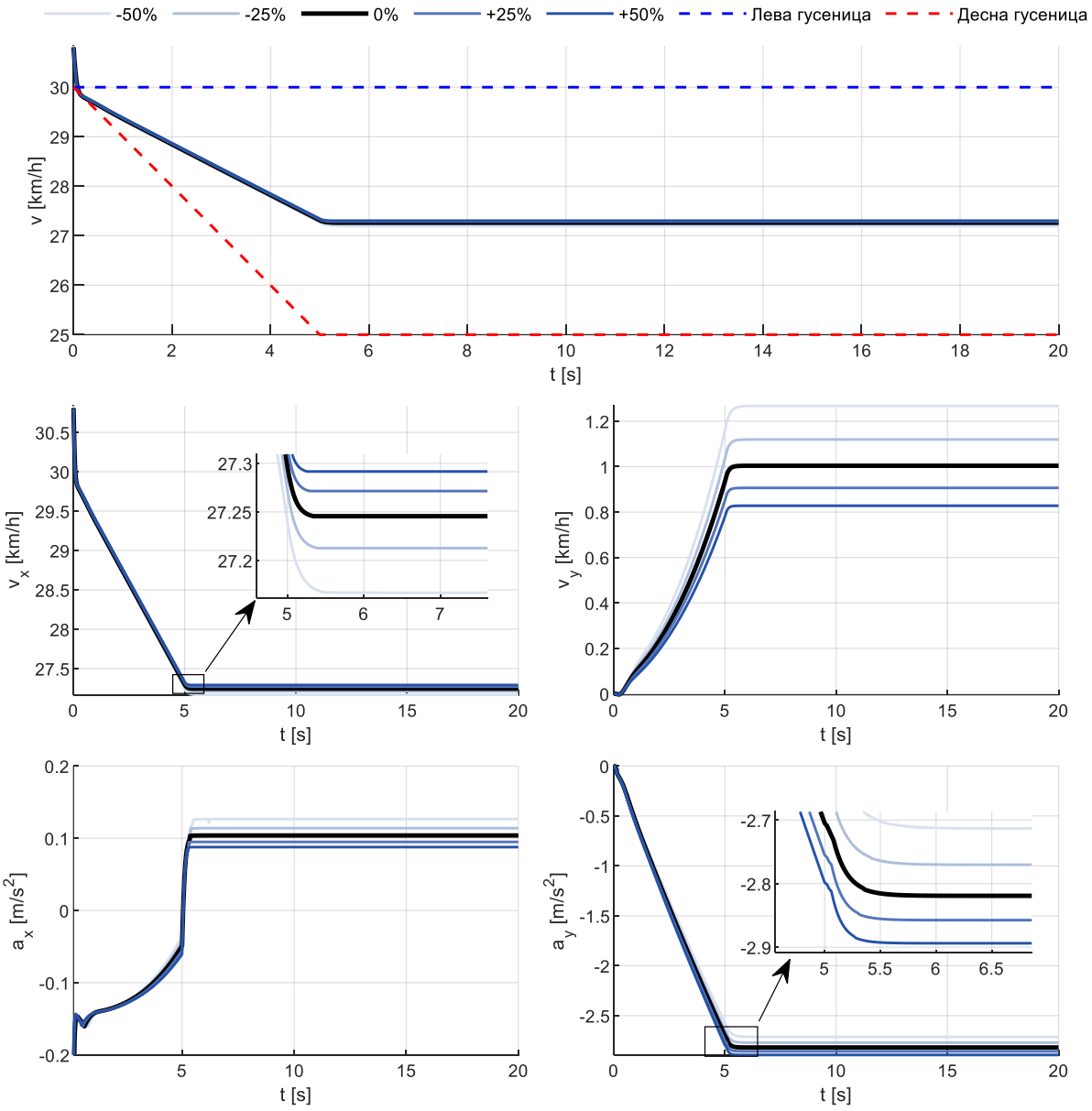
Слика 5.32. Утицај промене ширине гусенице на трајекторију у току заокрета.

Анализа контактних сила показује да промена ширине гусенице има доминантан утицај на подужне силе у контакту са подлогом. Слично као и код повећања дужине контакта гусеница са подлогом, и у случају повећања ширине гусенице долази до смањења подужне силе на унутрашњој гусеници и повећања на спољашњој. Са повећањем ширине гусенице долази и до повећања апсолутних вредности бочних сила на обе гусенице. Укупни момент заокрета се са повећањем ширине гусенице повећава, што указује на неповољније услове за остваривање заокрета.



Слика 5.33. Утицај промене ширине гусенице на оптерећења у току заокрета.

На основу спроведене анализе може се закључити да ширина гусеница има значајну улогу и у формирању подужних сила и отпора заокрету. Овакви резултати потврђују физичку утемељеност и поузданост развијеног симулационог модела.



Слика 5.34. Утицај промене ширине гусенице на брзину и убрзања у току заокрета.

Спроведена анализа осетљивости показала је да развијени симулациони модел на конзистентан и физички оправдан начин описује утицај најзначајнијих конструкционих параметара возила на његово динамичко понашање. При томе је уочено да поједини параметри, као што су дужина контакта гусеница и подлоге, као и ширина трага, имају израженији утицај на геометрију заокрета и развој бочних сила, док су други параметри, попут момента инерције и висине тежишта, примарно значајни у прелазним режимима.

Посебно је значајно да контактни параметри, пре свега ширина трага, дужина контакта гусенице са подлогом и ширина гусеница, имају доминантан утицај на бочну динамику возила, клизање и отпорни момент заокрета. Повећање ширине трага, ширине гусеница и дужине контакта доводи до смањења бочног угла клизања и стабилнијег кретања. Такође, повећање ширине гусеница и дужине контакта истовремено утиче и на повећање отпорног момента заокрету, што јасно указује на постојање компромиса између маневарских способности и потребних погонских сила. Овакви трендови су у потпуности у складу са познатим стварним понашањем гусеничних возила.

Важно је истаћи да ни при значајним варијацијама разматраних параметара није уочено нарушавање нумеричке стабилности модела, нити појава нереалних динамичких ефеката. Ово указује да је развијени симулациони модел робустан и погодан за примену у анализи различитих конструкционих решења, као и за даље истраживање утицаја управљачких система и алгоритама управљања на понашање гусеничних возила у реалним условима кретања.

5.4. Примена симулационог модела у тестирању рада алгоритама управљања

Развијени симулациони модел гусеничног возила може се користити као платформа за тестирање и анализу различитих алгоритама аутоматског управљања, како класичних, тако и напредних. Основна намена овог поглавља није да се изврши оптимизација конкретног регулатора, већ да се покаже да развијени модел омогућава реалистично сагледавање понашања управљаног система у условима који значајно одступају од идеализованих претпоставки.

У том циљу, понашање система управљања анализирано је упоредо са идеализованим моделом који не узима у обзир сложену интеракцију гусенице и подлоге, и развијеним симулационим моделом који укључује терамеханичке ефекте, клизање и нелинеарне контактне силе. Овакво поређење омогућава јасно уочавање разлика у динамичком одзиву, стабилности и тачности праћења референтних величина.

5.4.1. Кинематички модел кретања гусеничног возила

Кретање гусеничног возила у XoY које се заснива на чисто кинематичким параметрима, и не укључује појаву бочног клизања возила, може се представити следећом једначином:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\,\theta & 0 \\ sin\,\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \tag{58}$$

где су:

- $\dot{X}$ - брзина возила дуж X - осе,
- $\dot{Y}$ - брзина возила дуж Y - осе,
- θ - угао закретања возила,
- v - транслаторна брзина возила и
- ω - угаона брзина возила.

Транслаторна и угаона брзина возила представљају чисто кинематичке параметре и зависе искључиво од геометријских параметара возила. Исте се могу одредити следећим једначинама:

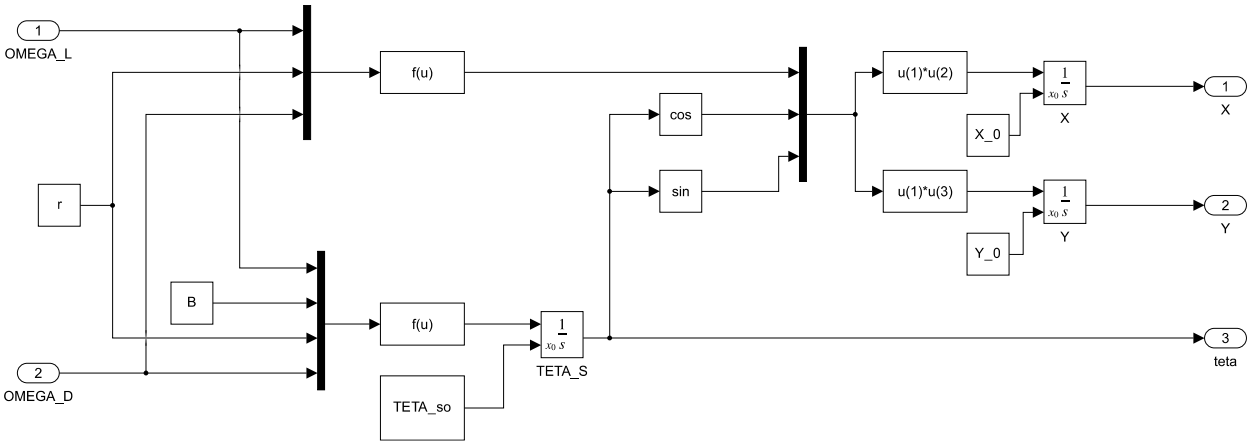
$$v = \frac{r}{2}(\Omega_l + \Omega_r), \tag{59}$$

$$\omega = \frac{r}{B}(\Omega_l - \Omega_r), \tag{60}$$

где су:

- Ω_l - угаона брзина левог погонског точка и
- Ω_r - угаона брзина десног погонског точка.

Овако дефинисан модел (слика 5.35) може се користити за одређивање кинематичке трајекторије возила. Честа је пракса да се овакав или слични модели користе за тестирање рада модела аутоматског управљања, што може у неким ситуацијама довести до погрешних закључака. Заправо, како је већ описано, а и представљено кроз резултате спроведеног истраживања, на облик трајекторије битну улогу има подлога по којој се возило креће. Кинематички модел занемарује ову важну чињеницу.

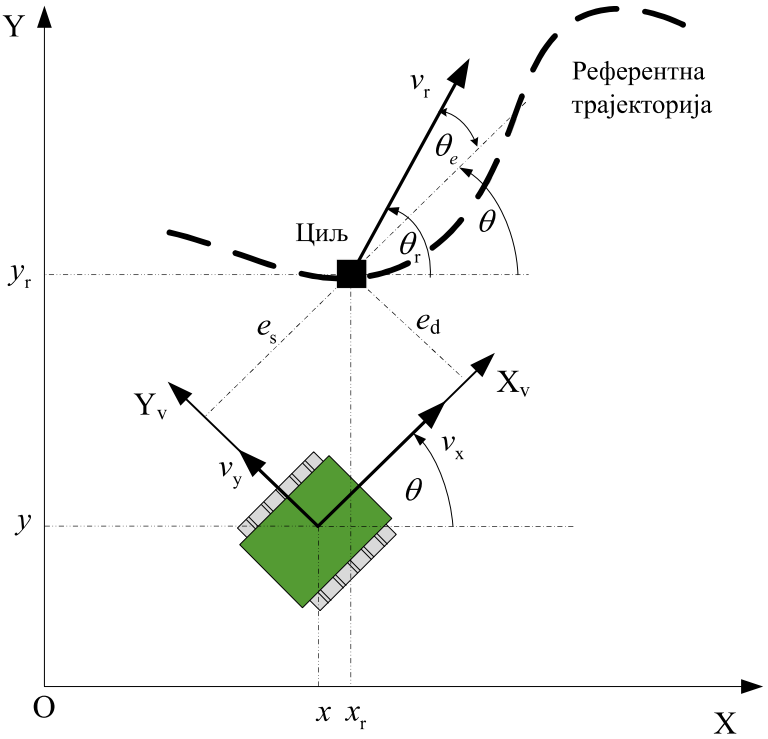


Слика 5.35. Кинематички модел гусеничног возила у Simulink-у.

5.4.2. Примена PI и PID регулатора у симулационом моделу

У оквиру тестирања развијеног симулационог модела гусеничног возила, разматрана је примена класичних PI и PID регулатора као средства за верификацију понашања управљаног система. Циљ примене алгоритама аутоматског управљања није њихово детаљно пројектовање, већ провера да ли развијени модел омогућава стабилно и смислено управљање у условима праћења задатих референтних величина. На тај начин, управљачка структура служи као инструмент за испитивање динамичких карактеристика модела, а не као примарни предмет истраживања.

Тестирање је спроведено кроз задатак праћења референтне трајекторије, при чему се утицај идеализованог и развијеног симулационог модела анализира упоредо. Присуство терамеханичких ефеката, клизања и нелинеарних контактних сила у развијеном моделу директно се одражава на рад регулатора и облик прелазних процеса, што омогућава јасно уочавање разлика у односу на поједностављене моделе. На слици 5.36 дефинисан је проблем праћења циља, и рачунање растојања (грешке) тренутне позиције возила до циља. На тај начин, контролер треба да управља возилом, при чему грешка положаја треба да буде минимална.

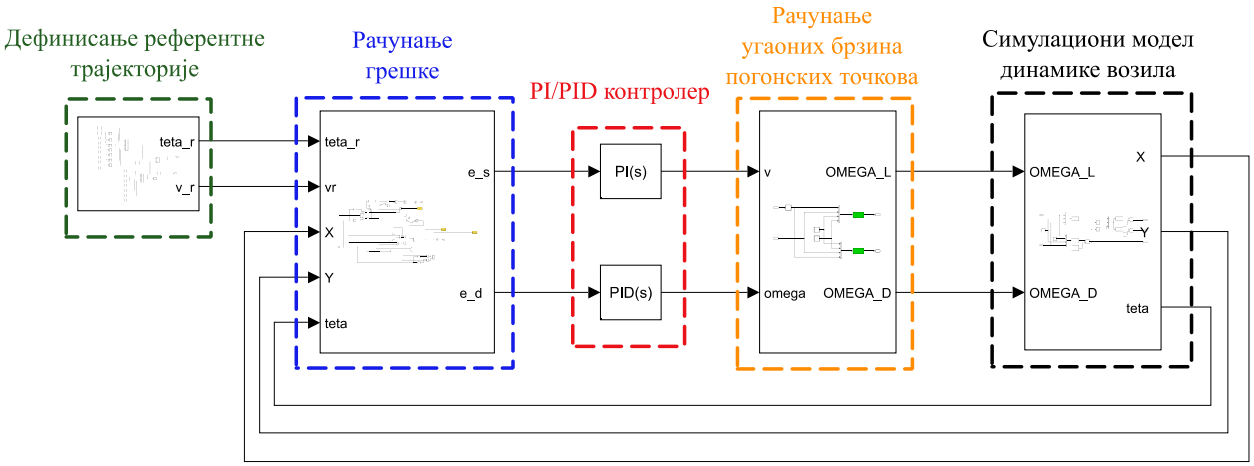


Слика 5.36. Дефинисање праћења циља [4].

Полазећи од наведеног, а анализирајући проблем приказан на слици 5.36, грешке положаја возила у односу на циљ e_s и e_d могу се израчунати на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} e_s \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \end{bmatrix} \tag{61}$$

Дефинисане грешке праћења трајекторије користе се као улазне величине система аутоматског управљања, чија је имплементација реализована у симулационом окружењу. На основу ових величина, регулатори генеришу управљачке сигнале који се уводе у симулациони модел возила, чиме се остварује затворена управљачка петља, као што је приказано на слици 5.37.



Слика 5.37. Симулациони модел са имплементираним PI/PID контролерима.

Као што је приказано на слици 5.37, за управљање транслаторном брзином возила коришћен је PI контролер, док је за управљање угаоном брзином возила коришћен PID контролер. Вредности коришћене за подешавање контролера дате су у табели 5.2.

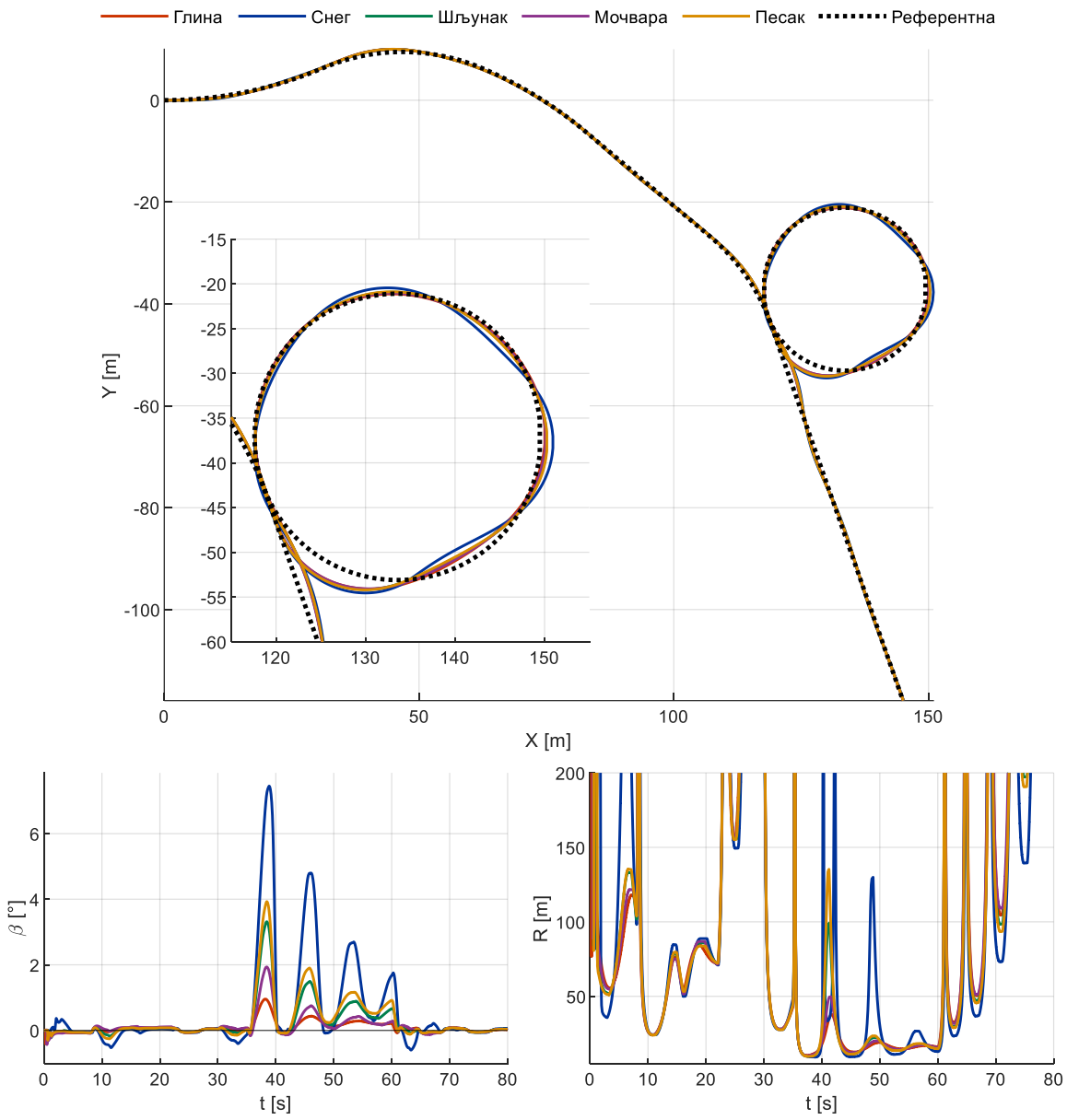
Табела 5.2. Вредности параметара за PI/PID контролере

Параметар	PI контролер	PID контролер
P	3	0.25
I	1.28	0.13
D	/	0.3

На почетку управљања, модел рачуна грешке положаја возила у односу на референтну трајекторију, а затим те вредности прослеђује контролерима. Након обраде сигнала, контролери израчунавају наредну транслаторну и угаону брзину возила и прослеђују њихове вредности до блока за рачунање угаоних брзина погонских точкова. Након израчунавања, вредности угаоних брзина прослеђују се у развијени симулациони модел динамике кретања гусеничног возила у коме се рачунају силе у контакту возила са подлогом, брзина возила, али и наредни положај возила у координатном систему. Те вредности се враћају на почетак симулације где се поново рачуна грешка положаја.

5.4.3. *Резултати употребе PI/PID контролера*

Приказани алгоритам праћења задате трајекторије тестиран је на свих пет подлога које су дате у табели 4.1. Такође, на сликама од 5.38 до 5.40 приказани су резултати који се односе на динамику кретања брзоходног гусеничног возила.

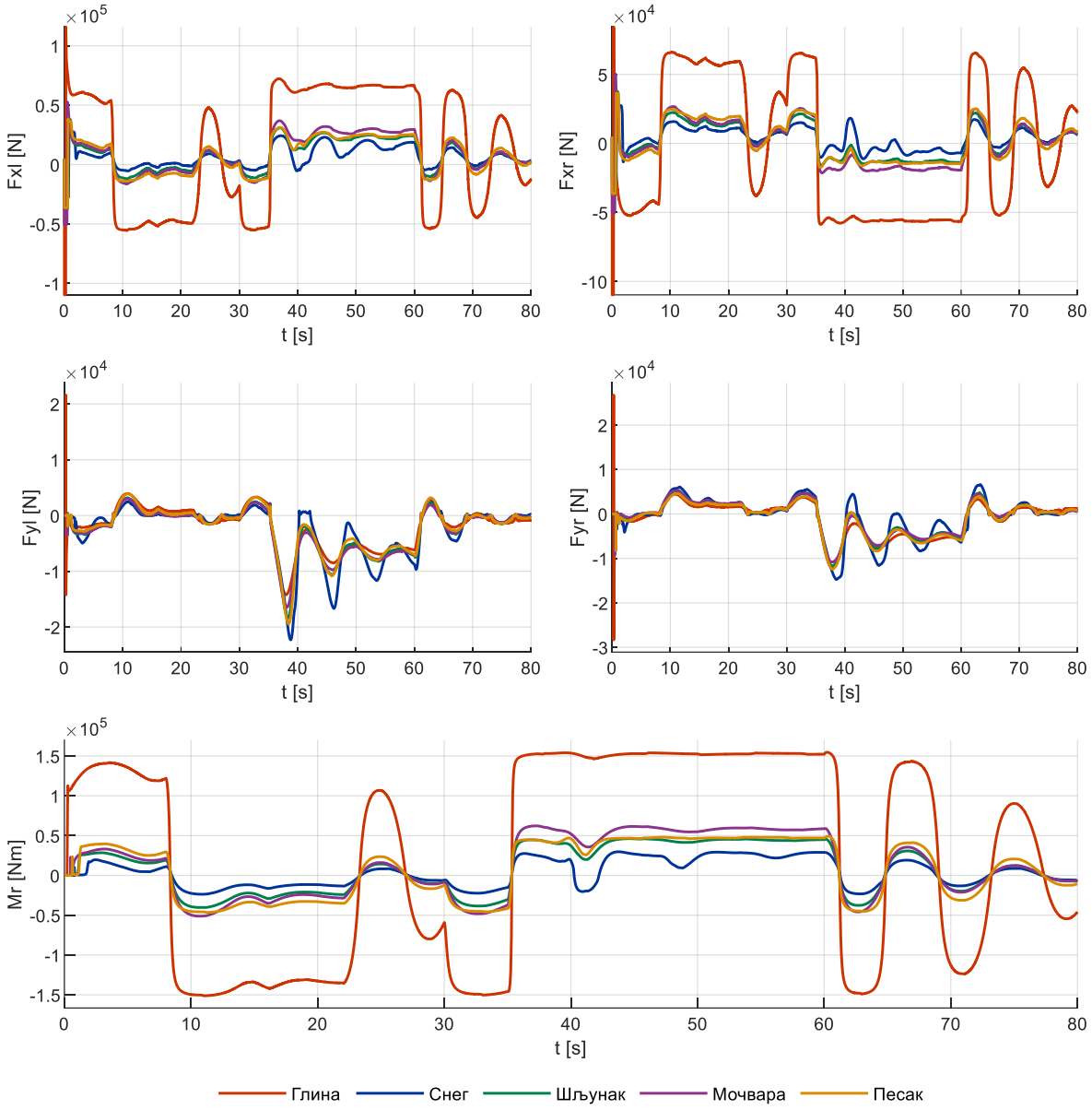


Слика 5.38. Анализа праћења референтне трајекторије.

Дијаграм трајекторије показује да возило у свим разматраним условима подлоге успешно прати задату референтну путању. На праволинијским деоницама уочава се готово потпуно поклапање са референтном трајекторијом, док су разлике израженије у зонама кривина и наглих промена закривљености путање. На подлози са најмањом носивошћу и највећим клизањем (снег) присутна су израженија одступања у односу на референтну

трајекторију, што указује на утицај контактне динамике на тачност праћења, иако стабилност кретања није нарушена.

Промена угла клизања возила показује јасну зависност од типа подлоге. На чвршћим подлогама угао клизања остаје малих вредности током целог маневра, док се на подлогама са израженим клизањем јављају краткотрајни пикови, нарочито током уласка у заокрет. Ови пикови су најизраженији код снега, што је у складу са физичким очекивањима, и потврђује да модел адекватно репродукује бочну динамику возила под утицајем подлоге.

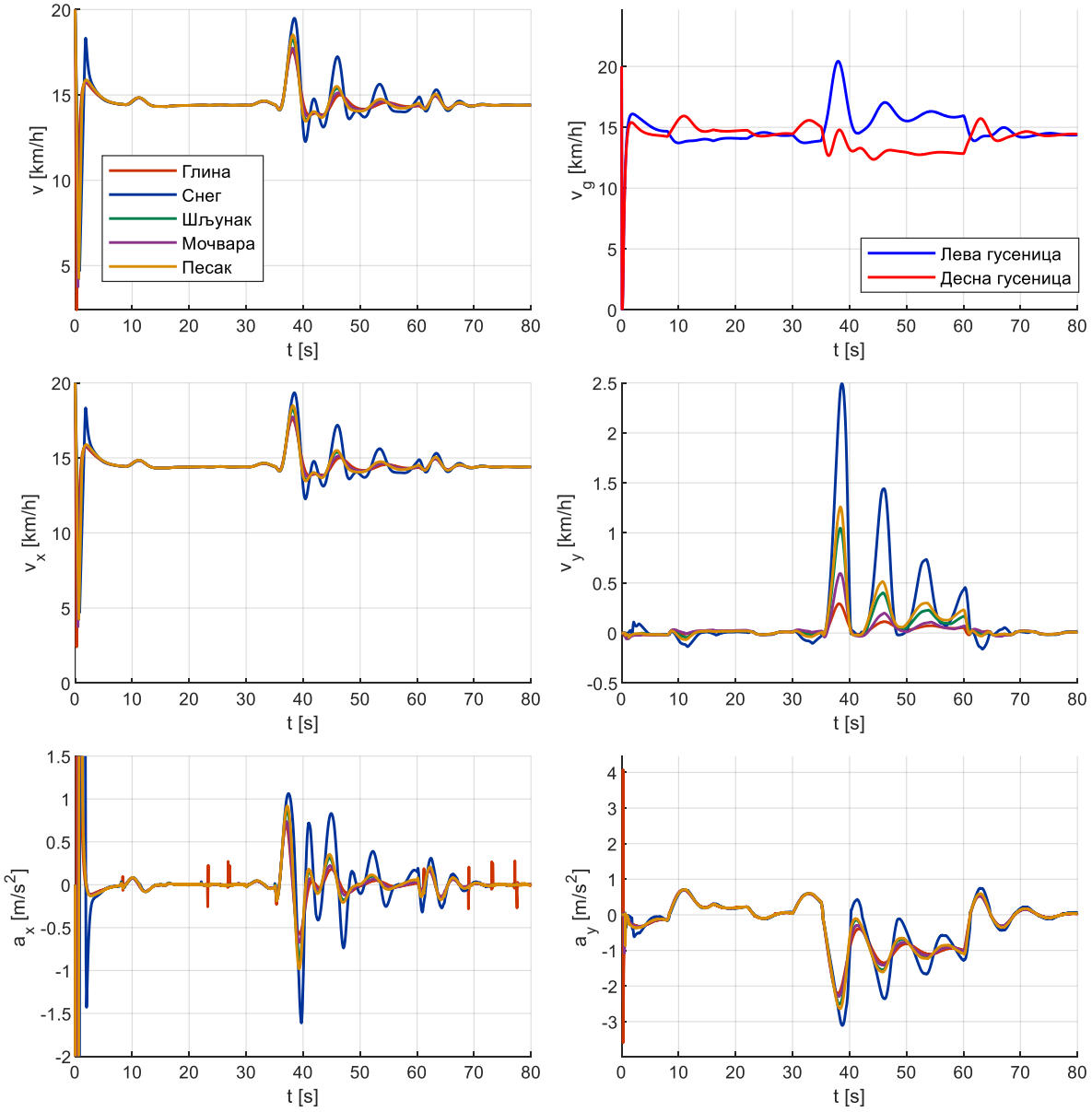


Слика 5.39. Анализа оптерећења возила.

Подужне силе показују значајне разлике у зависности од подлоге. На чвршћим подлогама силе су релативно глатке и мањег амплитудног опсега, док се на мекшим

подлогама јављају израженији пикови и промене знака, посебно током промена режима кретања. Ово понашање указује на различите механизме преноса вучне силе. Бочне силе су најизраженије током маневара заокрета, што је у директној вези са појавом бочног клизања.

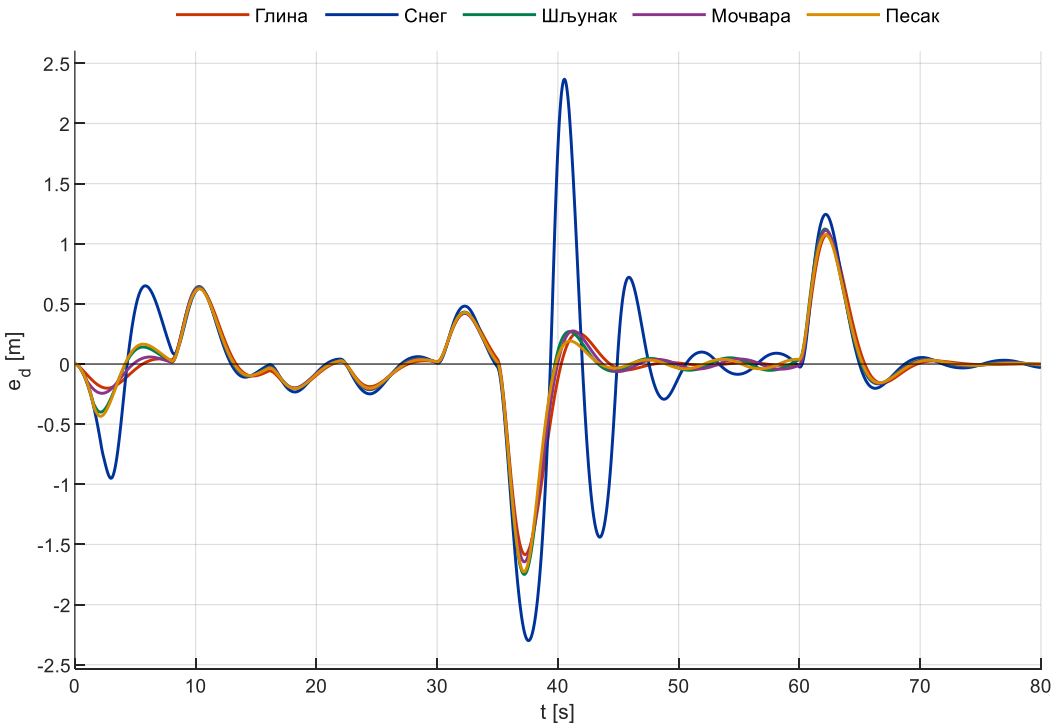
Отпорни момент заокрета показује изражену зависност од типа подлоге и тренутне геометрије кретања. На чвршћим подлогама момент има стабилнији ток, док се на мекшим јављају нагле промене и веће апсолутне вредности. Овакво понашање директно утиче на рад PID регулатора у угаоној петљи и представља један од кључних извора нелинеарности у систему управљања.



Слика 5.40. Анализа промене брзине и убрзања возила.

Дијаграми брзина и убрзања показују да PI регулатор обезбеђује стабилно праћење задате подужне брзине у већем делу трајања симулације, при чему су одступања ограничена на зоне интензивних маневара и промене закривљености путање. Попречна компонента брзине и одговарајућа убрзања остају малих вредности у праволинијском кретању, док се током заокрета јављају краткотрајни пикови, израженији на подлогама са већим клизањем, што указује на утицај интеракције гусенице и тла на динамички одзив управљаног система.

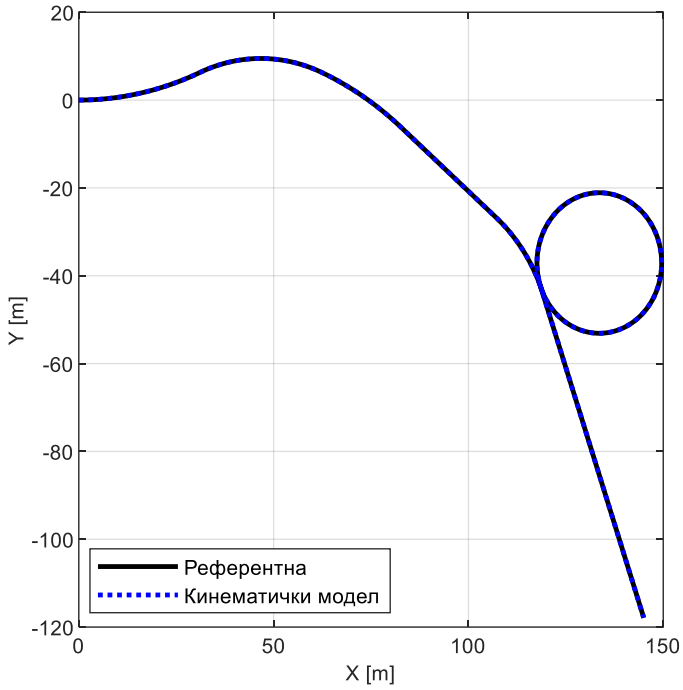
Слика 5.41 приказује временску промену грешке праћења трајекторије за пет различитих типова подлоге при примени PI/PID управљања. За све разматране терене грешка остаје ограничена, и након прелазних процеса тежи нули, што указује на стабилан рад управљачког система. На чвршћим подлогама, као што су глина и шљунак, грешка има мање амплитуде и брже се пригушује након промена закривљености путање, док су на песку одступања нешто израженија, али без нарушавања стабилности праћења. Насупрот томе, на подлогама са израженим клизањем, као што је снег, јављају се веће амплитуде грешке и израженије осцилације, нарочито током маневара заокрета, што одражава утицај смањене бочне носивости и динамике интеракције гусенице и тла на рад регулатора.



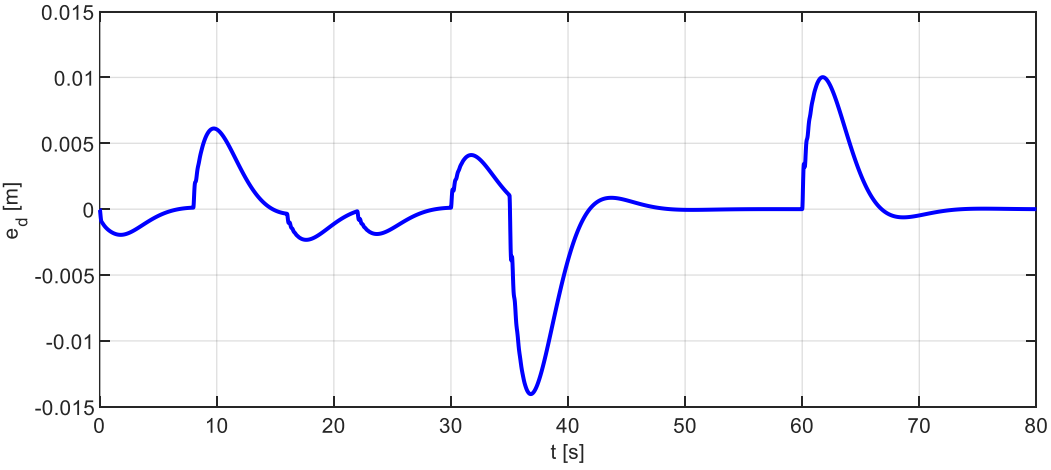
Слика 5.41. Грешка управљања.

Поређења ради, на слици 5.42 приказани су резултати управљања идеалног кинематичког модела. Уочава се да возило готово идеално прати задату трајекторију.

Временски ток грешке положаја показује да је иста веома мале амплитуде и да остаје ограничена током целе симулације, са максималним вредностима реда величине неколико милиметара.



а)



б)

Слика 5.42. Резултати управљања идеалног кинематичког модела.

Међутим, овакво понашање је последица поједностављених претпоставки модела, пре свега занемаривања динамике контакта гусенице и подлоге, клизања и нелинеарних отпорних сила. Због тога, параметри регулатора подешени на основу идеализованог модела, не одражавају реалне услове кретања гусеничног возила. При преласку са идеализованог модела на развијени симулациони модел, који обухвата терамеханичке ефекте и

реалистичну интеракцију са подлогом, уочава се да исте вредности параметара управљања не обезбеђују једнако добар динамички одзив. Ово указује да подешавање регулатора на основу идеалног модела може довести до недовољне робусности управљања у реалним условима, посебно при кретању по подлогама са израженим клизањем и променљивом носивошћу.

Сходно томе, идеализовани кинематички модел може послужити као почетни алат за развој и проверу логике управљања, али није довољно поуздан за коначно подешавање алгоритама аутоматског управљања. За реалистичну процену перформанси и применљивости управљачких система неопходна је употреба симулационог модела који верно репродукује динамику возила и интеракцију гусенице и тла, чиме се смањује ризик од значајних одступања при примени у реалним условима кретања.

Развијени симулациони модел није ограничен на примену PI и PID регулатора, већ представља општу платформу за тестирање различитих алгоритама аутоматског управљања. Захваљујући реалистичном моделовању динамике возила и интеракције гусенице и подлоге, могућа је примена напреднијих управљачких стратегија, као што су алгоритми засновани на процени поремећаја и адаптивни регулатори, али и други модели управљања. На тај начин, развијени и представљени симулациони модел омогућава упоредну анализу различитих приступа управљању у истим условима кретања, и представља погодну основу за даља истраживања и развој напредних система аутоматског управљања гусеничним возилима.

6. ПРИМЕНА МАШИНСКОГ УЧЕЊА У ЦИЉУ ПОВЕЋАЊА ТАЧНОСТИ РЕЗУЛТАТА СИМУЛАЦИОНОГ МОДЕЛА

Примена метода вештачке интелигенције у инжењерству бележи значајан раст у последњих неколико година. Модели засновани на вештачкој интелигенцији (енгл. *Artificial Intelligence – AI*) који су последњих година развијени постали су фундаментални алати у развоју инжењерских решења, са све широм применом у предикцији, оптимизацији и управљању сложеним системима [120]. У оквиру области вештачке интелигенције развија се машинско учење (енгл. *Machine Learning – ML*), које се заснива на употреби података за обуку модела. Основна идеја *ML* метода је да алгоритми кроз анализу великог броја примера самостално „уче“ законитости које постоје, на основу којих предвиђају нове резултате.

Имајући у виду наведена ограничења у развоју поузданих и прецизних симулационих модела контакта возила и подлоге, методе засноване на машинском учењу представљају значајан научни и инжењерски искорак ка новој генерацији симулација високе прецизности. Ови модели користе различите податке за обуку и кроз процес учења успевају да „ухвате” комплексне нелинеарности које класични терамеханички приступи не могу у потпуности да опишу. За обуку се могу користити подаци добијени из постојећих симулационих модела, експерименталних мерења, као и хибридних извора који комбинују емпиријске и физичке моделе [121–123].

Полазећи од ових сазнања, развијен је допунски модел заснован на методама машинског учења, чији је основни циљ побољшање резултата развијеног симулационог модела контакта гусеничног возила и подлоге. Применом алгоритама вишеслојних неуронских мрежа (енгл. *Multi-Layer Perceptron – MLP*) и стабала одлучивања (енгл. *Light Gradient Boosting Machine – LightGBM*), уз употребу библиотеке за аутоматску оптимизацију хиперпараметара у машинском учењу (*Optuna*), добијен је физички информисани (енгл. *physics–informed)* хибридни модел који комбинује класичне терамеханичке једначине са подацима из симулација и експеримената. На овај начин постигнуто је смањење грешке и повећање прецизности предикције подужних сила у контакту гусеница и подлоге у односу на развијени и приказани симулациони модел.

6.1. Подаци за обуку модела машинског учења

За обуку и тестирање развијеног модела машинског учења коришћени су комбиновани подаци, који обухватају резултате симулационог модела и приказаних експерименталних мерења. Део резултата симулационог модела коришћен је као улаз у *ML* модел, док су експериментални подаци о вредностима подужних сила у контакту гусеница и подлоге

представљали излазне вредности. На овај начин обезбеђена је веза између симулационих предикција и стварних вредности, како сила тако и других физичких величина које описују кретање возила, што је омогућило да *ML* алгоритми кроз процес учења „ухвате" комплексне нелинеарности које класични модели нису могли у потпуности да представе. Комбинација симулационих и експерименталних података дала је основу за развој хибридног модела, који је постигао већу прецизност у предикцији сила у односу на развијени симулациони модел.

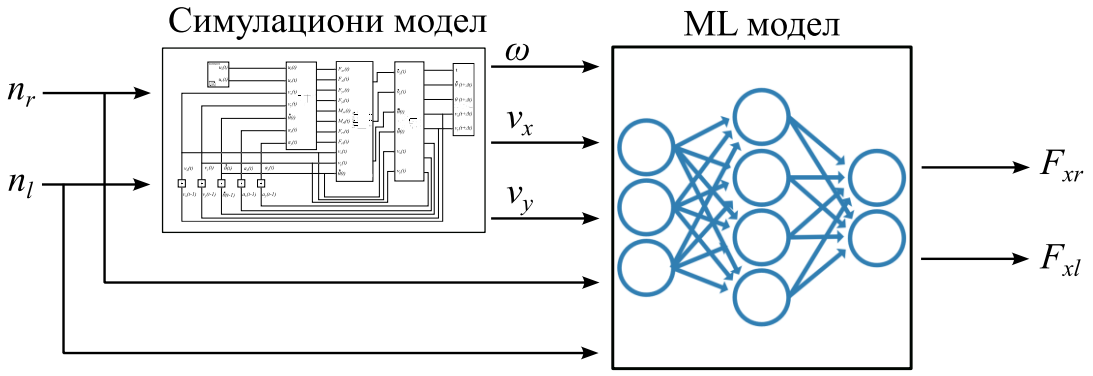
Као што је описано, развијени симулациони модел у свакој итерацији израчунава велики број физичких величина, укључујући транслаторне и угаоне брзине возила, убрзања, координате тренутног положаја, као и друге величине које одређују динамику возила. Након анализе свих величина које модел генерише, издвојено је пет најрелевантнијих које су коришћене као улазне променљиве за обуку *ML* модела, и то:

- n_r – број обртаја десног погонског точка,
- n_l – број обртаја левог погонског точка,
- ω – угаона брзина возила,
- v_x – брзина возила у правцу x – осе и
- v_y – брзина возила у правцу y – осе.

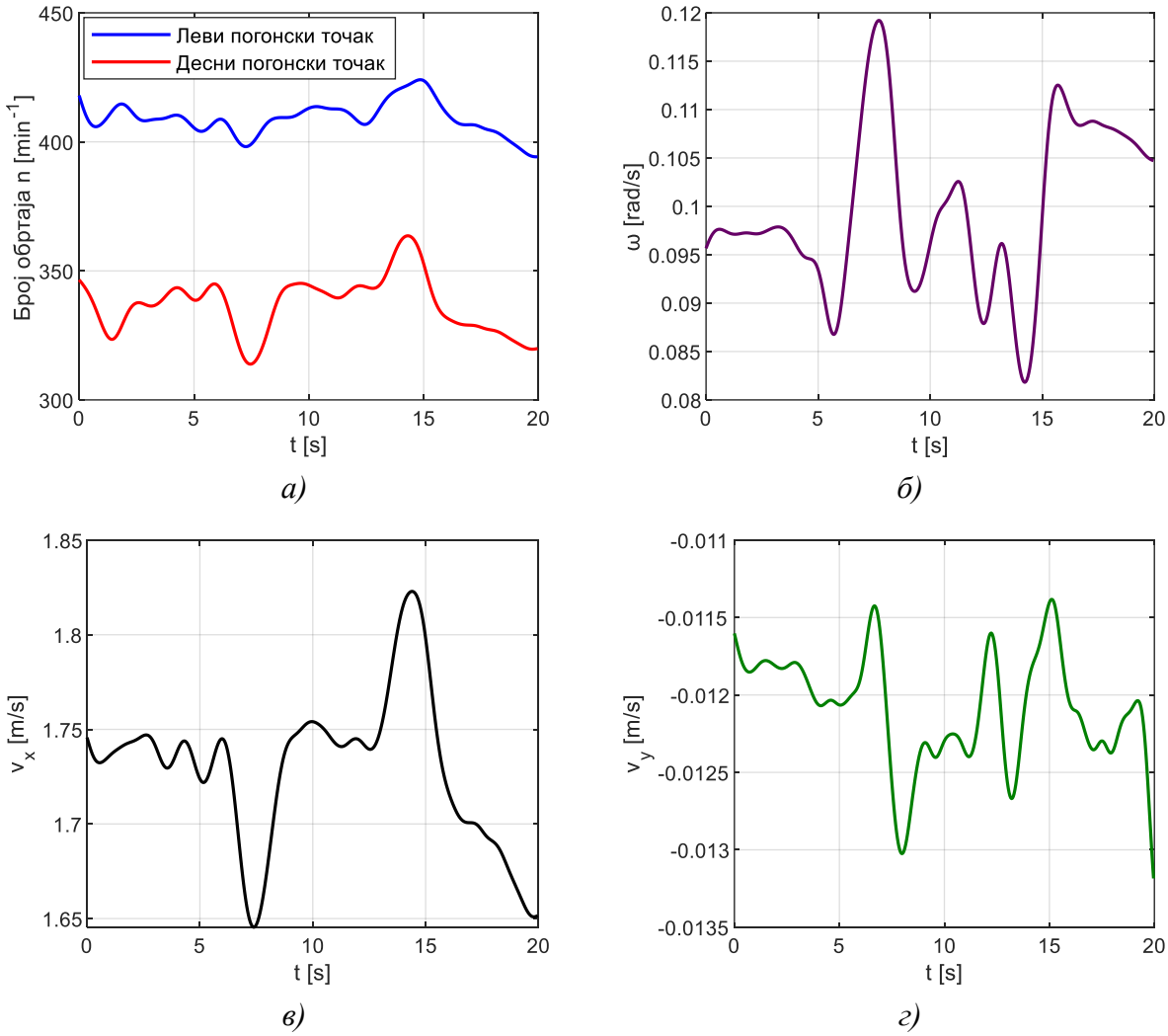
Избор је заснован на анализи извода и интеграла наведених величина, као и на статистичкој корелационој анализи са експериментално измереним силама, чиме је потврђено да управо ових пет величина у највећој мери директно утичу на вредности сила [124]. Бројеви обртаја десног и левог погонског точка представљају примарне улазне сигнале који одређују кретање возила и имају снажан утицај на развој подужних сила. Угаона брзина возила коју израчунава симулациони модел садржи информације о ротацији возила са урачунатим клизањем. Такође, и брзине возила у правцу x – и y – осе у својим вредностима носе информацију о клизању и проклизавању возила. На слици 6.1 приказан је дијаграм тока који илуструје комбиновани приступ. Измерени бројеви обртаја улазе у симулацију, и из ње се издвајају још три величине које заједно са бројевима обртаја погонских точкова улазе у *MLP* и *LightGBM* моделе ради предикције подужних сила.

Подаци за обуку модела су подељени у три целине (сета) и приказани су на сликама од 6.2 до 6.4. Бројеви обртаја десног и левог погонског точка добијени су експерименталним мерењем, и коришћени су као улаз у симулацију приликом њене валидације (поглавље 5.1). Остале величине добијене су извршавањем симулације, при чему су улази у симулацију

били наведени бројеви обртаја и параметри терена и возила који су приказани у табелама 4.2 и 5.1.



Слика 6.1. Ток генерисања података за обуку ML модела.

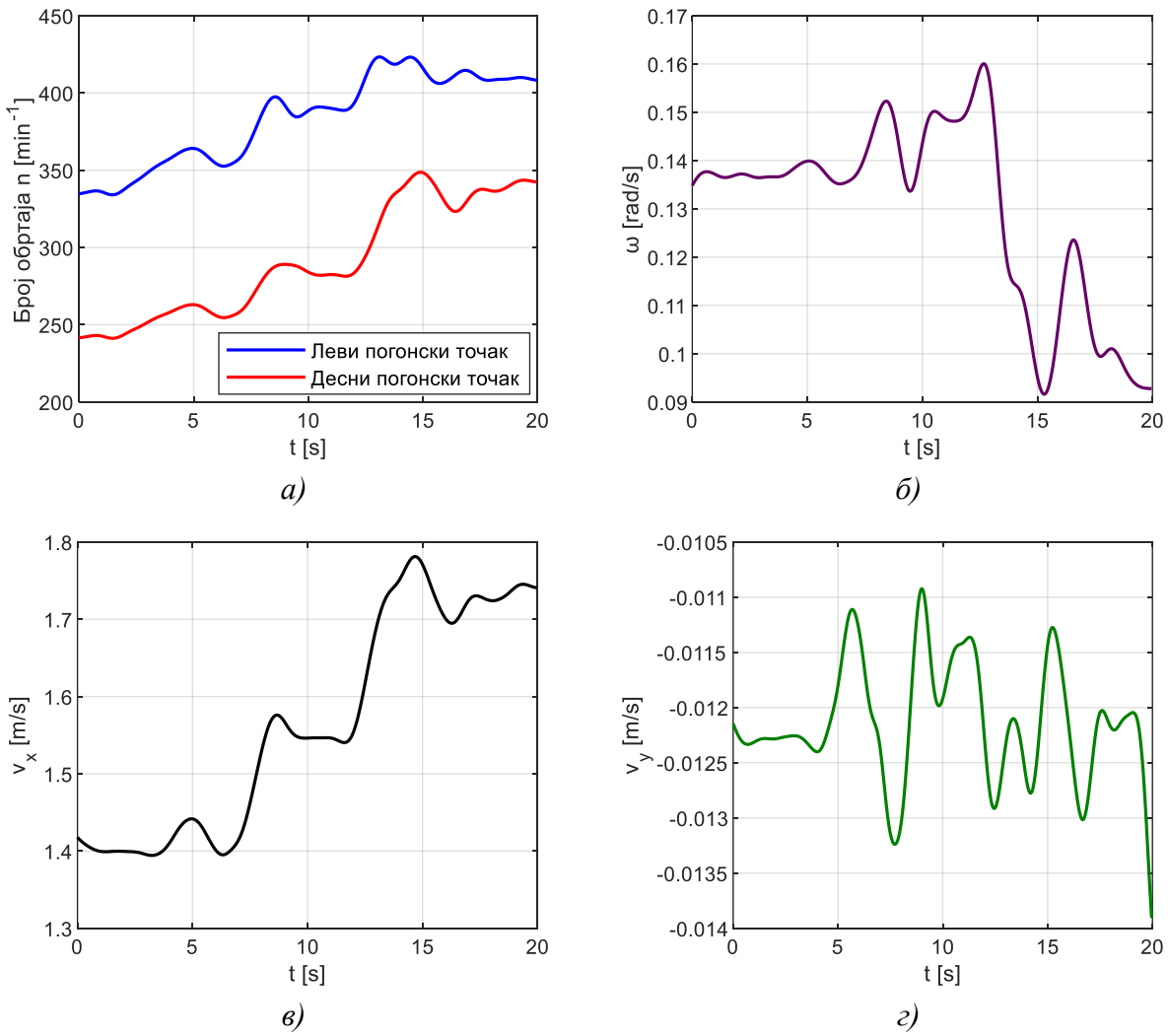


Слика 6.2. Први сет података за обуку ML модела.

Приказана три сета улазних података за обуку *ML* модела генерисана су на основу експерименталних мерења, са циљем да се обезбеди што прецизнија репрезентација стварних услова у контактној зони гусеница и подлоге. На овај начин модел машинског

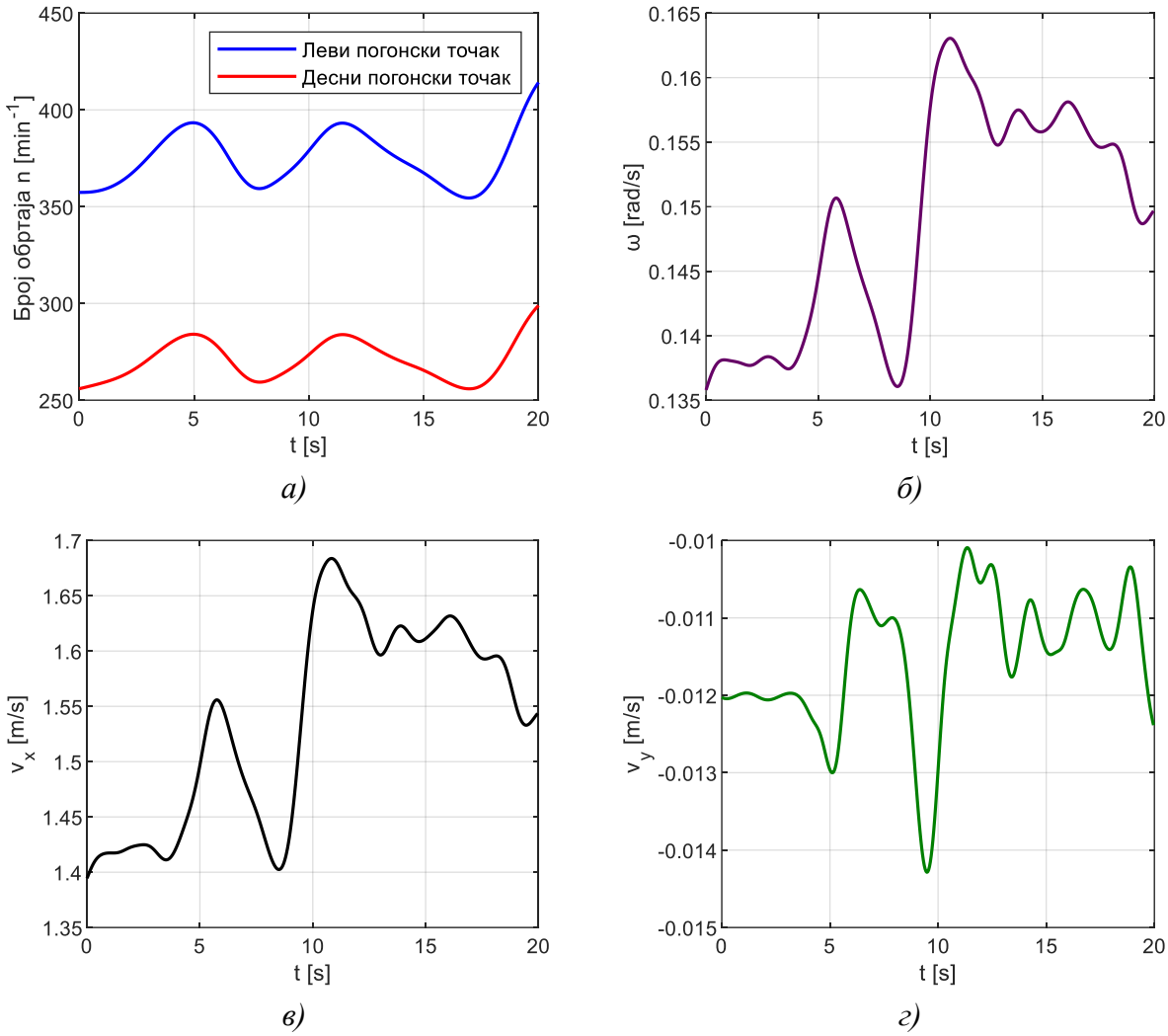
учења је обучаван на стварним вредностима сила које се јављају током кретања возила, чиме је омогућено да алгоритам кроз процес учења идентификује законитости и нелинеарности које постоје у току остваривања контакта. Оваква структура података доприноси бољој генерализацији модела и повећава његову прецизност.

Овако обучен модел машинског учења није универзалан, већ је уско везан за конкретно возило и терен на којем је обучаван. То представља његово основно ограничење, јер је за примену на другим типовима терена или за друга возила неопходно генерисати нови скуп података са измењеним параметрима подлоге и карактеристикама возила, и поновити експериментална мерења у тим условима. У том смислу, развијени симулациони модел има значајну предност као платформа за тестирање, пошто омогућава брзу промену параметара, како терена, тако и возила, а добијени резултати остају у инжењерски прихватљивим границама, имајући у виду да је претходно извршена експериментална валидација модела.



а) *б)* *в)* *г)*

Слика 6.3. Други сет података за обуку ML модела.

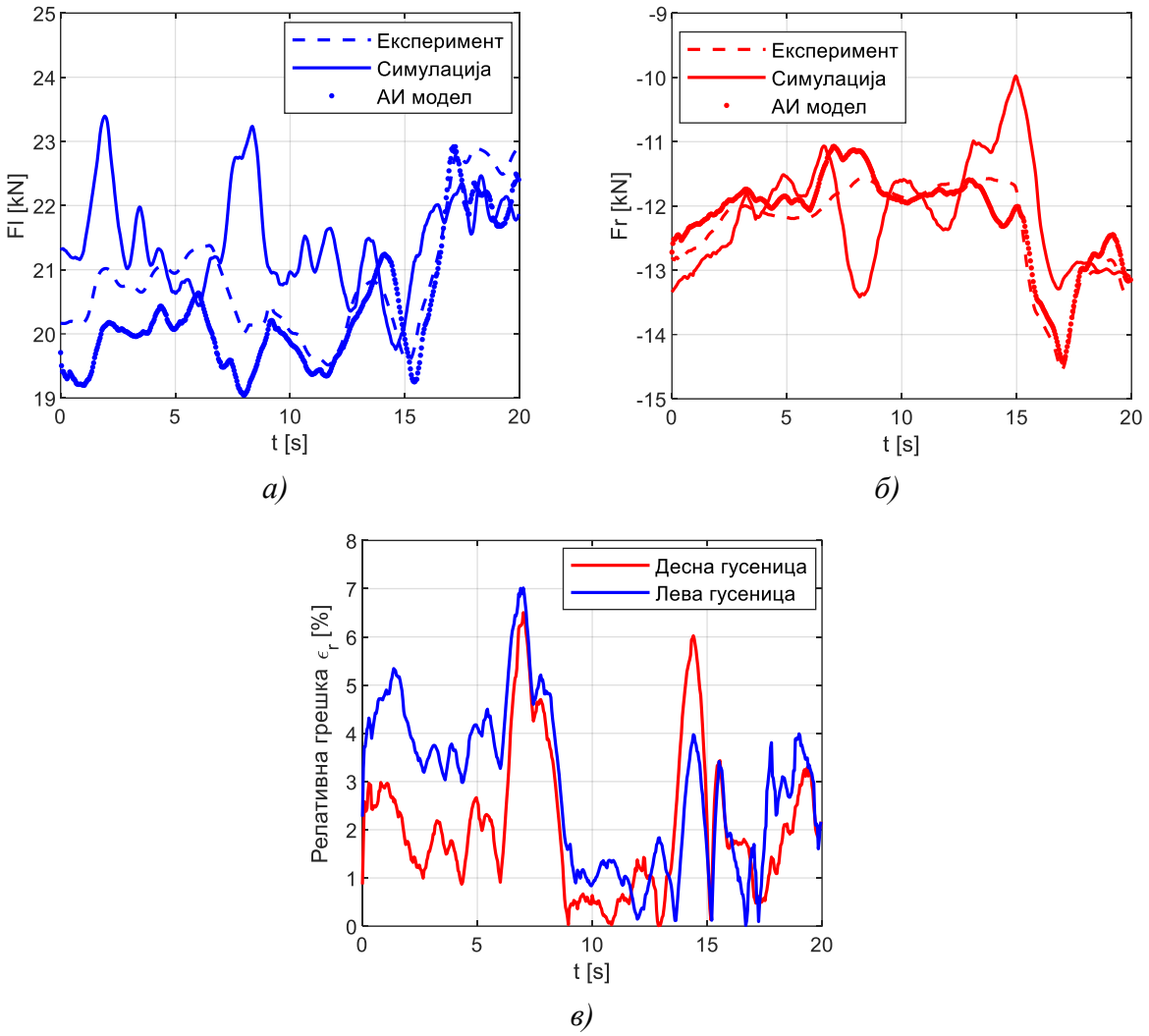


Слика 6.4. Трећи сет података за обуку ML модела.

6.2. Резултати обуке и тестирања модела машинског учења

Да би се обезбедила поуздана процена генерализације модела, примењена је стратегија ротационе обуке (енгл. *cross-validation*) и тестирања на три издвојена скупа података. У првој итерацији модел је обучаван на другом (слика 6.3) и трећем (слика 6.4) сету података, док је први (слика 6.2) сет коришћен за тестирање.

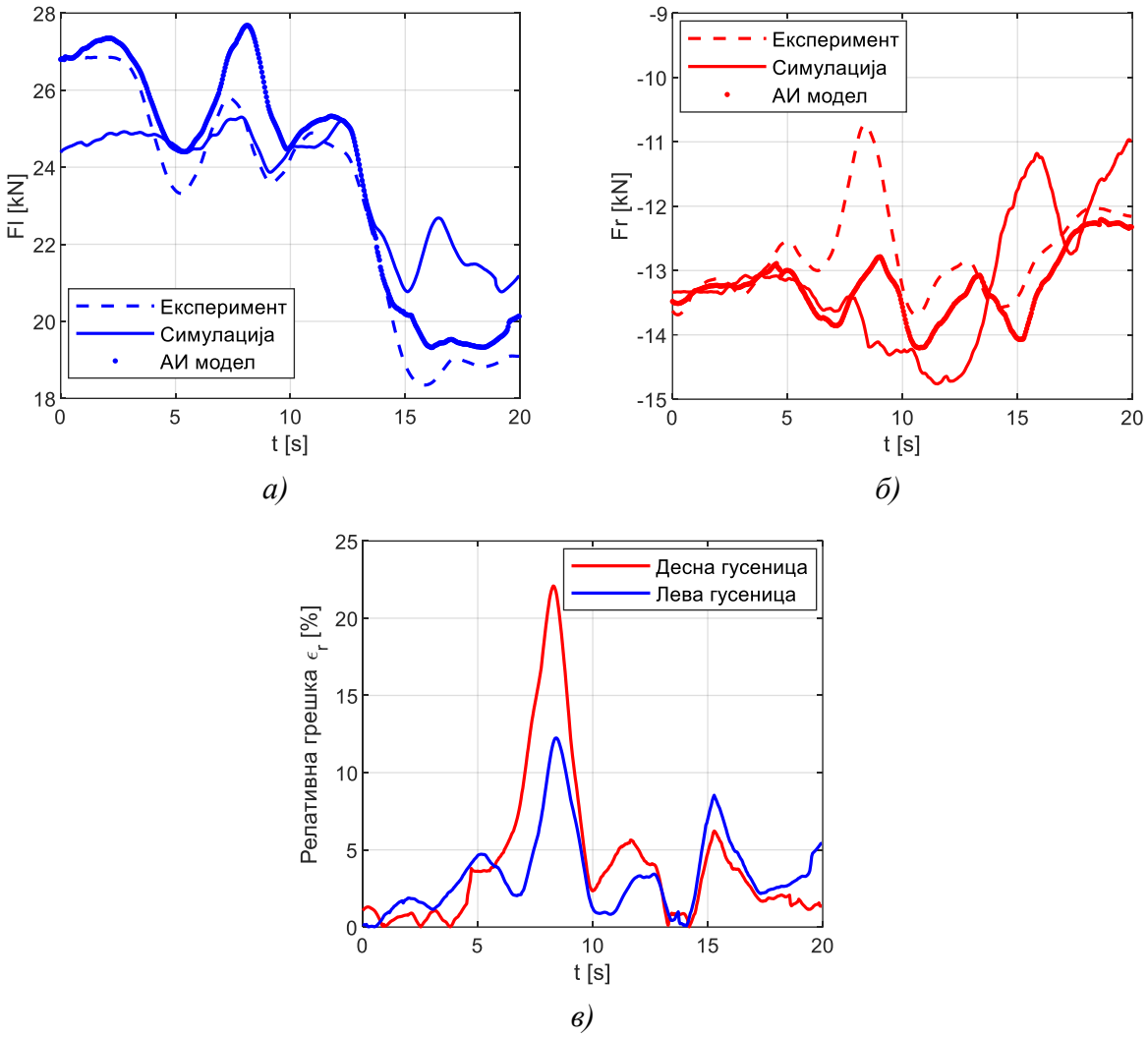
Анализа прве итерације показује да је развијени модел машинског учења постигао значајно боље резултате у односу на симулациони модел (слика 6.5*а* и 6.5*б*). Просечна релативна грешка за десну гусеницу износила је 2.08%, а за леву 2.87% (слика 6.5*в*), док је симулациони модел у истим условима дао грешке од 6.65% за десну, и 5.75% за леву гусеницу. Ови резултати указују да је обучени модел машинског учења успео да боље „ухвати" нелинеарне зависности између улазних параметара и сила у контактној зони, чиме је постигнута већа прецизност у односу на класични симулациони приступ.



а) *б)* *в)*

Слика 6.5. Резултати обуке и тестирања ML модела у првој итерацији.

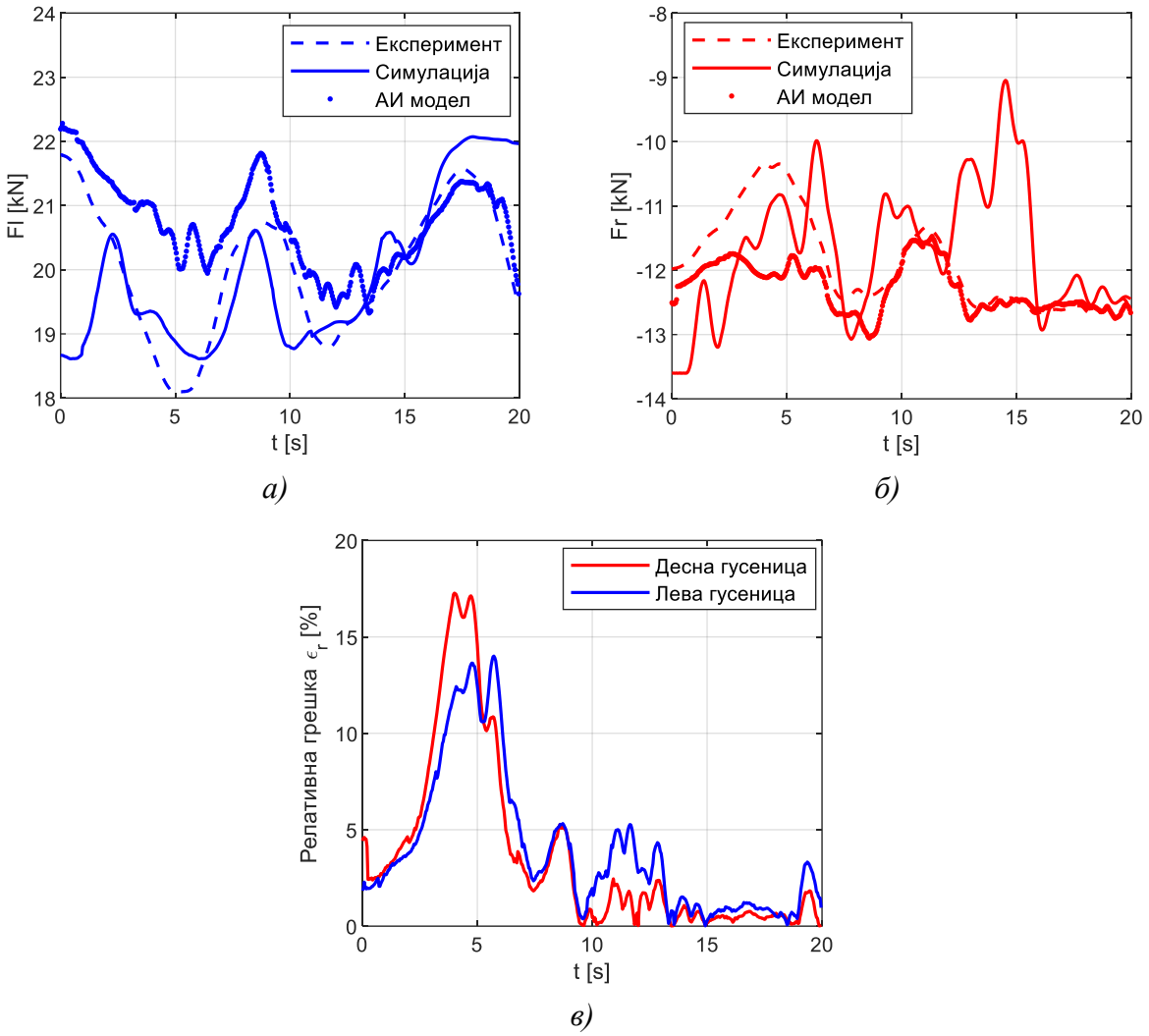
У другој итерацији, када је модел обучаван на првом и трећем сету података, а други сет коришћен за тестирање, добијене су просечне релативне грешке од 4.22% за десну и 3.39% за леву гусеницу (слика 6.6). Упоредо, симулациони модел је у истим условима дао значајно веће грешке (7.52% за десну и 6.37% за леву гусеницу). Ови резултати показују да је модел машинског учења и у другој итерацији успео да обезбеди већу прецизност у односу на класичну симулацију, иако су вредности грешке нешто више него у првој итерацији. Важно је нагласити да се и у овом случају уочава конзистентна предност хибридног приступа, односно да модел машинског учења боље прати експерименталне трендове и смањује одступања у односу на симулацију.



а) *б)* *в)*

Слика 6.6. Резултати обуке и тестирања ML модела у другој итерацији.

Коначно, у трећој итерацији модел је обучаван на првом и другом сету података, док је трећи сет коришћен за тестирање. Просечна релативна грешка за десну гусеницу износила је 3.67%, а за леву 3.96% (слика 6.7). Упоредо, симулациони модел је дао грешке од 7.83% за десну и 3.49% за леву гусеницу. Ови резултати показују да је модел и у трећој итерацији задржао предност у односу на резултате симулације за десну гусеницу. Вредности релативних грешака указују да обучени модел машинског учења успева да обезбеди стабилнију и прецизнију предикцију сила у контактној зони, што потврђује његову способност да генерализује знање стечено током обуке. Иако се апсолутне вредности грешке мењају у зависности од скупа података који је коришћен за тестирање, уочава се тренд да *ML* модел даје резултате ближе експерименталним мерењима у односу на класични симулациони приступ. Постигнута стабилност резултата у различитим итерацијама представља значајан показатељ поузданости хибридног приступа, што упућује на његову применљивост у процени динамичког понашања возила.



а) *б)* *в)*

Слика 6.7. Резултати обуке и тестирања ML модела у трећој итерацији.

Приказана процедура омогућила је да сваки сет података буде употребљен и за обуку и за тестирање, чиме је добијена свеобухватна процена способности модела да предвиђа силе у условима који нису били укључени у процес учења. На тај начин обезбеђена је, не само валидација тачности модела, већ и процена његове генерализације кроз различите комбинације података. Добијени резултати показују да хибридни приступ машинског учења и симулације може да се посматра као поуздана методологија за анализу динамике кретања гусеничних возила. Остварени резултати дају мање грешке, и значајну усаглашеност са експерименталним резултатима.

Истовремено, приказана анализа може представљати полазну основу за будуће правце истраживања у области терамеханике и динамике кретања гусеничних возила, где се модели машинског учења могу посматрати као наредни значајан искорак у развоју методологија за опис и предвиђање сложених интеракција између возила и подлоге.

7. ПРИМЕНА РАЗВИЈЕНОГ СИМУЛАЦИОНОГ МОДЕЛА

Развијени симулациони модел гусеничног возила представља свеобухватни алат за анализу динамике кретања и интеракције возила са различитим типовима подлоге. Захваљујући укључивању терамеханичких модела контакта, као и веродостојном математичком опису подужне и бочне динамике, модел омогућава разматрање понашања возила у условима који знатно превазилазе могућности класичних кинематичких или поједностављених динамичких приступа. На тај начин, његова примена није ограничена искључиво на академске анализе, већ се може користити као инжењерски алат у различитим фазама пројектовања, модернизације и испитивања гусеничних возила. Такође, важан допринос спроведеног истраживања односи се и на прикупљене експерименталне податке, имајући у виду ограничену доступност сличних.

У овом поглављу биће укратко представљене могуће примене развијеног симулационог модела. Прва и најважнија примена развијеног модела односи се на теоријску анализу динамике контакта гусеница са подлогом. Међутим, како модел описује и динамику кретања гусеничног возила, створени су услови и за друге примене.

7.1. Прорачун динамике гусеничног возила

Важна примена развијеног симулационог модела јесте израчунавање како подужне, тако и бочне динамике гусеничног возила при кретању по различитим типовима подлоге. Модел омогућава анализу расподеле контактних сила дуж гусенице, појаве клизања, отпорних момената заокрета и утицаја геометријских и масених параметара возила на његово кретање. За разлику од идеализованих модела, резултати симулације директно одражавају физичка ограничења контакта са тлом, што омогућава реалистичну процену стабилности, управљивости и покретљивости возила.

Посебан значај оваквог приступа огледа се у могућности анализе кретања у граничним условима, као што су нагли маневри заокрета, прелазак из праволинијског кретања у заокрет, као и вожња по подлогама са израженим клизањем. На основу добијених резултата могу се идентификовати критични режими рада, који нису уочљиви применом поједностављених модела, али имају значајан утицај на реално понашање возила.

7.2. Модернизација гусеничних возила

Развијени симулациони модел може се ефикасно користити у процесу модернизације постојећих гусеничних платформи. Приликом измена масе возила, расподеле масе, ширине трага, дужине контакта гусенице са подлогом или положаја тежишта, модел омогућава

квалитативну анализу утицаја ових промена на динамику кретања и управљивост возила. На тај начин, могуће је унапред проценити последице конструкционих измена без потребе за скупим и временски захтевним експерименталним испитивањима.

Оваква примена је нарочито значајна у случајевима када се модернизација врши додавањем нових система, као што су додатна оклопна заштита, електронска опрема или наоружање, што директно утиче на масу и положај тежишта. Модел омогућава да се различите варијанте модернизације упореде, и да се изабере решење које обезбеђује прихватљив компромис између покретљивости, стабилности и носивости возила.

7.3. Прорачун оптерећења трансмисије и погонских елемената

Једна од значајних области примене развијеног модела односи се на анализу оптерећења трансмисије и погонских елемената гусеничног возила. На основу израчунатих контактних сила, отпорних момената и динамичких оптерећења, могуће је одредити реалне моменте и снаге које се преносе кроз погонски систем у различитим режимима кретања. Ово је од посебног значаја при анализи заокрета, где су оптерећења асиметрична и значајно зависе од карактеристика подлоге.

Примена модела у овој области омогућава идентификацију критичних режима рада трансмисије, као и процену њене издржљивости и поузданости. Добијени резултати могу се користити као улазни подаци за димензионисање механичких компонената, избор преносних односа и пројектовање система хлађења, чиме се смањује ризик од преоптерећења и превременог отказа погонских елемената.

7.4. Пројектовање хибридних гусеничних возила

Развијени симулациони модел представља погодну основу за анализу и пројектовање хибридних гусеничних возила, код којих се класични погон допуњује електричним или електрохидрауличним компонентама. Модел омогућава да се динамички захтеви погонског система повежу са стратегијама управљања енергијом, као и да се анализира расподела оптерећења између различитих извора енергије у приближно реалним условима кретања.

Посебна предност огледа се у могућности симулације различитих сценарија кретања, као што су вожња по захтевном терену, чести маневри заокрета и промене брзине, који имају значајан утицај на енергетску ефикасност хибридног система. На тај начин, модел може послужити као алат за избор конфигурације хибридног погона и оптимизацију стратегија управљања енергијом, уз задржавање веродостојног описа интеракције возила и подлоге.

7.5. Оптимизација и тестирање алгоритама аутоматског управљања

Још једна важна област примене развијеног симулационог модела односи се на тестирање и оптимизацију алгоритама аутоматског управљања. Захваљујући веродостојном опису динамике и контактних ефеката, модел омогућава да се алгоритми управљања испитају у условима који су блиски стварним, што није могуће применом идеализованих кинематичких модела. На тај начин, могуће је анализирати робусност управљања, осетљивост на промене подлоге и понашање система у граничним условима.

Поред класичних PI и PID регулатора, који су приказани у раду, модел се може користити за тестирање напреднијих стратегија управљања. Оваква примена омогућава упоредну анализу различитих приступа управљању у истим условима кретања, и представља важну основу за даља истраживања у области аутоматског управљања гусеничним возилима.

7.6. Општа разматрања и перспективе примене

Свеобухватно посматрано, развијени симулациони модел представља флексибилну и веома употребљиву платформу која обједињује анализу динамике кретања, интеракције са подлогом и управљачких система. Његова примена обухвата широк спектар инжењерских задатака, од анализе постојећих конструкција до подршке развоју нових и модернизованих гусеничних платформи. Управо ова широка применљивост представља једну од кључних предности предложеног приступа и основ за даља проширења модела.

8. ЗАКЉУЧАК

Након спроведеног истраживања и представљања резултата, извршена је детаљна анализа, на основу које су усвојени многи закључци који су представљени у овом поглављу. Ради прецизнијег представљања закључака, они су груписани и изнети кроз посебне тематске целине.

8.1. Анализа остварења циља истраживања

Циљ докторске дисертације био је развој симулационог модела интеракције гусеница и деформабилне подлоге, као и његова експериментална валидација, ради анализе динамике кретања и управљивости брзоходног гусеничног возила током заокрета. Посебан акценат стављен је на проучавање контактних сила и појаве бочног клизања, које имају доминантан утицај на стабилност заокрета и трајекторију кретања возила на деформабилним подлогама.

Спроведеним истраживањем постављени циљ је у потпуности остварен. Развијен је симулациони модел који омогућава анализу веродостојног динамичког понашања гусеничног возила у условима сложеног кретања, а његова тачност и применљивост потврђене су експерименталним мерењима на возилу БВП М80А. На тај начин обезбеђена је јасна веза између теоријског модела, симулационих резултата и реалних услова експлоатације.

8.2. Кључни резултати и њихов значај

У дисертацији је развијен математички модел интеракције гусенице и подлоге заснован на теорији смицајног напона, при чему је усвојен приступ који омогућава прорачун контактних сила уз прихватљиву рачунарску сложеност. За разлику од рачунарски веома захтевних нумеричких метода, као што су методе коначних или дискретних елемената, предложени модел омогућава примену у динамичким симулацијама и анализи управљачких процеса без значајних ограничења у погледу времена извршавања.

На основу развијеног математичког описа реализован је симулациони модел у MATLAB/Simulink окружењу, са јасно дефинисаним улазним величинама, параметрима возила и подлоге, као и излазним величинама од значаја за анализу кретања и управљивости. Структура модела омогућава флексибилну измену параметара и примену на различите услове кретања, што га чини погодним за систематску анализу утицаја појединих параметара на динамику заокрета возила.

Такође, експериментална истраживања спроведена на возилу БВП М80А обухватила су мерење обртних момената и угаоних брзина на излазним вратилима трансмисије, а добијени

подаци коришћени су за валидацију симулационог модела. Поређењем симулационих и експерименталних резултата утврђено је веома добро слагање анализираних величина, при чему просечна релативна грешка у прорачуну подужних контактних сила током заокрета не прелази 8%. Ови резултати потврђују да развијени модел на адекватан начин описује стварно понашање возила.

Симулацијама стабилног и нестабилног заокрета на различитим деформабилним подлогама анализиран је утицај карактеристика терена на бочно клизање, радијус заокрета и расподелу контактних сила. Показано је да на подлогама мање носивости долази до израженог бочног клизања и губитка стабилног режима заокрета, што директно утиче на управљивост и трајекторију кретања возила. Ови резултати имају значајну инжењерску вредност, јер омогућавају боље разумевање граница стабилности заокрета гусеничних возила у реалним условима експлоатације.

8.3. Примена развијеног симулационог модела

Спроведена анализа осетљивости модела на промену конструкционих параметара возила, као што су маса, геометријски параметри и карактеристике контакта гусенице и подлоге, показала је да модел доследно одражава физички очекиване трендове. На тај начин омогућена је квалитативна и квантитативна процена утицаја појединих параметара на динамику заокрета, што модел чини погодним за примену у процесима пројектовања и модернизације гусеничних возила.

Додатно, примена развијеног симулационог модела у тестирању рада алгоритама аутоматског управљања показала је да укључивање реалистичне динамике контакта има значајан утицај на понашање управљаног система. Показано је да поједностављени кинематички модели, који занемарују утицај деформабилне подлоге, могу довести до нетачних закључака при анализи управљивости, док предложени симулациони модел омогућава веродостојнију процену понашања возила у условима сложеног кретања са честом променом правца.

8.4. Будући правци истраживања

Резултати дисертације представљају добру основу за даљи развој и унапређење развијеног модела интеракције гусеница и подлоге. Један од могућих праваца будућих истраживања односи се на проширење модела у правцу детаљнијег описа нормалног напона и укључивања детаљне вертикалне динамике возила, што би омогућило још прецизнију анализу расподеле оптерећења у контактној зони.

Поред тога, развијени симулациони модел може бити примењен у даљим истраживањима усмереним на развој напредних алгоритама управљања, као и на могућу интеграцију са моделима хибридних погонских система. На тај начин, развијени модел може представљати основу за будућа истраживања у области аутономних гусеничних возила, као и за оптимизацију њихових перформанси у различитим условима кретања.

Будући развој метода машинског учења у области терамеханике и динамике возила отвара широк спектар нових могућности које тек треба систематски истражити. Поред већ показаног потенцијала у побољшању тачности симулационих модела и развоју хибридних модела, још увек остаје велики простор за примену напредних техника ML модела. Посебно се издвајају предвиђања динамике кретања гусеничних возила заснована искључиво на подацима, која омогућавају изградњу модела независних од претпоставки физичких закона и заснованих на статистичким обрасцима у симулационим и експерименталним подацима. Такав приступ у будућности може обезбедити независну процену понашања система, допринети истраживању утицаја који нису уочљиви у класичним моделима и развоју поузданијих алата за анализу интеракције возила са подлогом.

9. ЛИТЕРАТУРА

[1] Golanbari B, Mardani A, Hosainpour A, Taghavifar H. Predicting terrain deformation patterns in off-road vehicle-soil interactions using TRR algorithm. Journal of Terramechanics 2024;117:101021. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2024.101021.

[2] Özdemir MN, Kılıç V, Ünlüsoy YS. A new contact & slip model for tracked vehicle transient dynamics on hard ground. Journal of Terramechanics 2017;73:3–23. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2017.07.001.

[3] Amer NH, Zamzuri H, Hudha K, Kadir ZA. Modelling and Control Strategies in Path Tracking Control for Autonomous Ground Vehicles: A Review of State of the Art and Challenges. Journal of Intelligent & Robotic Systems 2016;86:225–54. https://doi.org/10.1007/s10846-016-0442-0.

[4] Drakulić M, Stanković M. ADRC-Based Trajectory Tracking of Unmanned Tracked Vehicles Under High Slippage Disturbance. 2024 14th International Conference on Electrical Engineering (ICEENG), IEEE; 2024, p. 362–6.

[5] Lu H, Xiong G, Guo K. Motion Predicting of Autonomous Tracked Vehicles with Online Slip Model Identification. Mathematical Problems in Engineering 2016;2016:1–13. https://doi.org/10.1155/2016/6375652.

[6] Baek S-H, Shin G-B, Lee S-H, Yoo M, Chung C-K. Evaluation of the Slip Sinkage and its Effect on the Compaction Resistance of an Off-Road Tracked Vehicle. Applied Sciences 2020;10:3175. https://doi.org/10.3390/app10093175.

[7] He R, Sandu C, Khan AK, Guthrie AG, Schalk Els P, Hamersma HA. Review of terramechanics models and their applicability to real-time applications. Journal of Terramechanics 2019;81:3–22. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2018.04.003.

[8] Cohen J. The Revolution in Science in America, 1900-1950. Substantia 2021;5:85–95. https://doi.org/10.36253/Substantia-1256.

[9] Ali Shaikh S, Li Y, Ma Z, Ali Chandio F, Hussain Tunio M, Ahmad F, et al. Effects of soil mechanical properties on the height and tractive performance of rubber grouser at different moisture contents. International Journal of Agricultural and Biological Engineering 2022;15:31–7. https://doi.org/10.25165/j.ijabe.20221506.7137.

[10] Koutras E, Moretti Leila F, Ribaric A, Natsiavas S. A new contact and road model for multi-body dynamic simulation of wheeled vehicles on soft-soil terrain. Multibody Syst Dyn 2025;63:39–62. https://doi.org/10.1007/s11044-024-09980-6.

[11] Bekker MG. Theory of Land Locomotion: The Mechanics of Vehicle Mobility. University of Michigan Press; 1956.

[12] Smith WC. Modeling of Wheel-Soil Interaction for Small Ground Vehicles Operating on Granular Soil. Ph.D. dissertation. University of Michigan, 2014.

[13] Vantsevich V, Gorsich D. Modeling and simulation fundamentals in design for ground vehicle mobility part I: Eastern approach. Journal of Terramechanics 2024;117:101020. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2024.101020.

[14] Trifunović M. Analiza uticaja specifične snage na dinamičke karakteristike lakih brzohodnih guseničnih vozila. Vojnotehnički Glasnik 1991;39:44–54. https://doi.org/10.5937/VojTehG9101044T.

[15] Стаменковић Д. Модел управљања аутономним моторним возилом. Докторска дисертација. Универзитет у Београду, Машински факултет, 2022.

[16] Kyrychenko I, Chernikov O, Khodyriev S. Review of achievements and research directions in computer modeling of machines and mechanisms in KhNAHU. Bulletin of Kharkov National Automobile and Highway University 2019:7–12. https://doi.org/10.30977/BUL.2219-5548.2019.87.0.7.

[17] Du Y, Gao J, Jiang L, Zhang Y. Development and numerical validation of an improved prediction model for wheel-soil interaction under multiple operating conditions. Journal of Terramechanics 2018;79:1–21. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2018.04.005.

[18] Laughery S, Gerhart G, Goetz R. Bekker's Terramechanics Model for Off-Road Vehicle Research: Fort Belvoir, VA: Defense Technical Information Center; 1990. https://doi.org/10.21236/ADA457955.

[19] Yang X, Wu D, Zou X, Chen H, Zhang S. An analysis of digging anchor machine stability and track wear under digging conditions. Sci Rep 2022;12:17738. https://doi.org/10.1038/s41598-022-22738-4.

[20] Perkins NC, Ma Z-D. A Track-Wheel-Terrain Interaction Model for Dynamic Simulation of Tracked Vehicles. Vehicle System Dynamics 2002;37:401–21. https://doi.org/10.1076/vesd.37.6.401.3522.

[21] Zhang Y, Dai J, Hu W, Negrut D. Using high-fidelity discrete element simulation to calibrate an expeditious terramechanics model in a multibody dynamics framework 2024. https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-4792928/v1.

[22] Wiberg V, Servin M, Nordfjell T. Discrete element modelling of large soil deformations under heavy vehicles. Journal of Terramechanics 2021;93:11–21. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2020.10.002.

[23] Kozhanov VN, Rusanov MA, Shtyka MG, Kukhar VS. Reducing the soil structure destruction along the rut and increasing the traction properties of the tractor by using the rear grouser of the track link. E3S Web Conf 2021;282:07009. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202128207009.

[24] Recuero A, Serban R, Peterson B, Sugiyama H, Jayakumar P, Negrut D. A high-fidelity approach for vehicle mobility simulation: Nonlinear finite element tires operating on granular material. Journal of Terramechanics 2017;72:39–54. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2017.04.002.

[25] Emmerich S, Franosch G, Burger M, Ullrich A, Quist J. Modeling, parametrizing, and simulating a DEM-based soil model for industrial applications. Multibody Syst Dyn 2026;66:387–402. https://doi.org/10.1007/s11044-025-10061-5.

[26] Van Wyk DJ, Spoelstra J, De Klerk JH. Mathematical modelling of the interaction between a tracked vehicle and the terrain. Applied Mathematical Modelling 1996;20:838–46. https://doi.org/10.1016/S0307-904X(96)00090-X.

[27] Lysych MN. Computer simulation of the process soil treatment by tillage tools of soil processing machines. CRM 2020;12:607–27. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-3-607-627.

[28] Chakravarthy PN, Sharma PK. Terramechanics Models for Tracked Vehicle Terrain Interaction Analysis A Review. Defence Science Journal 2024;74:469–81. https://doi.org/10.14429/dsj.74.19029.

[29] Piancastelli L, Raboni L, Leon-Cardenas C. Soft terrain CFD simulation for tracked vehicles. Cogent Engineering 2025;12:2473349. https://doi.org/10.1080/23311916.2025.2473349.

[30] Janosi Z, Hanamoto B. The analytical determination of drawbar pull as a function of slip for tracked vehicles in deformable soils, Torino: 1961.

[31] Wong JY, Reece AR. Prediction of rigid wheel performance based on the analysis of soil-wheel stresses: Part II. Performance of towed rigid wheels. Journal of Terramechanics 1967;4:4–25. https://doi.org/10.1016/0022-4898(67)90035-3.

[32] Bruzzone L, Nodehi SE, Fanghella P. Tracked Locomotion Systems for Ground Mobile Robots: A Review. Machines 2022;10:648. https://doi.org/10.3390/machines10080648.

[33] Chen Y, Xu X, Wang W, Gao X, Yang C. Optimization of Grouser–Track Structural Parameters for Enhanced Tractive Performance in Unmanned Amphibious Tracked Vehicles. Actuators 2025;14:390. https://doi.org/10.3390/act14080390.

[34] Wang W, Yan Z, Du Z. Experimental study of a tracked mobile robot's mobility performance. Journal of Terramechanics 2018;77:75–84. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2018.03.004.

[35] Wong JY. On the role of mean maximum pressure as an indicator of cross-country mobility for tracked vehicles. Journal of Terramechanics 1994;31:197–213. https://doi.org/10.1016/0022-4898(94)90016-7.

[36] Shahgholi G, Aghdamifar E, Moinfar A, Szymanek M, Tanaś W. Evaluation of the changes in Bekker's parameters and their use in determining the rolling resistance. Int Agrophys 2024;38:257–66. https://doi.org/10.31545/intagr/187017.

[37] Regazzi N, Maraldi M, Molari G. A theoretical study of the parameters affecting the power delivery efficiency of an agricultural tractor. Biosystems Engineering 2019;186:214–27. https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2019.07.006.

[38] Drakulic M, Peric S, Djuric A, Rakic S. Track–terrain interaction during steering of high-speed tracked vehicles: Numerical modeling and experimental validation. Measurement 2025;256:118225. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2025.118225.

[39] Comin FJ, Saaj CM. Models for Slip Estimation and Soft Terrain Characterization With Multilegged Wheel–Legs. IEEE Trans Robot 2017;33:1438–52. https://doi.org/10.1109/TRO.2017.2723904.

[40] Lyu W, Li Z, Lou P. The Research on Shear Properties of Deformable Ground Soil under High-speed Driving Conditions. MATEC Web Conf 2019;253:01006. https://doi.org/10.1051/matecconf/201925301006.

[41] Mocera F, Somà A, Nicolini A. Grousers Effect in Tracked Vehicle Multibody Dynamics with Deformable Terrain Contact Model. Applied Sciences 2020;10:6581. https://doi.org/10.3390/app10186581.

[42] Jun G, Peng S, Cao C, Fang L, Qin K. Numerical Prediction of Tractive Performance of Track-Soil Interaction System Through Different Grouser Heights. Eng Agríc 2024;44:e20220119. https://doi.org/10.1590/1809-4430-eng.agric.v44e20220119/2024.

[43] Le X, Roberts R, Duva A. Teaching Finite Element Analysis for Mechanical Undergraduate Students. 2019 ASEE Annual Conference & Exposition Proceedings, Tampa, Florida: ASEE Conferences; 2019, p. 33348. https://doi.org/10.18260/1-2--33348.

[44] Petrova R, editor. Perusal of the Finite Element Method. InTech; 2016. https://doi.org/10.5772/62611.

[45] Baccouch M, editor. Finite Element Methods and Their Applications. IntechOpen; 2021. https://doi.org/10.5772/intechopen.83274.

[46] Kisuule N, Kigozi J, Tumutegyereize P, Raymond M, Sempiira JE. Validation of the analytical Mix-kneader shaft design using finite element analysis. Discov Mechanical Engineering 2025;4:37. https://doi.org/10.1007/s44245-025-00128-0.

[47] Liu L, Zhang J, Song C, He K, Saputra AA, Gao W. Automatic scaled boundary finite element method for three-dimensional elastoplastic analysis. International Journal of Mechanical Sciences 2020;171:105374. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105374.

[48] Ouadie K, Elkhalfi A, El-mekkaoui J, Mastorakis N. Solving the Problem of Constraints Due to Dirichlet Boundary Conditions in the Context of the Mini Element Method. International Journal of Mechanics 2020;14. https://doi.org/10.46300/9104.2020.14.2.

[49] Ellobody E, Feng R, Young B. Review of the General Steps of Finite Element Analysis. Finite Element Analysis and Design of Metal Structures, Elsevier; 2014, p. 15–30. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-416561-8.00002-0.

[50] Dimauro L, Venturini S, Tota A, Galvagno E, Velardocchia M. High-speed tracked vehicle model order reduction for static and dynamic simulations. Defence Technology 2024;38:89–110. https://doi.org/10.1016/j.dt.2024.01.006.

[51] Reese L, Qiu T, Linzell D, Rado Z. Field-scale testing and numerical investigation of soil-boulder interaction under vehicular impact using FEM and coupled FEM-SPH formulations. International Journal of Protective Structures 2016;7:77–99. https://doi.org/10.1177/2041419615622728.

[52] Shahzamanian Sichani MM. A Low-Fidelity Finite Element Model of Tire-Terrain Interaction for Autonomous Off-Road Vehicles. DFMA 2024;37:69–82. https://doi.org/10.4028/p-asl0Hl.

[53] Qu T, Feng Y, Wang M. An adaptive granular representative volume element model with an evolutionary periodic boundary for hierarchical multiscale analysis. Numerical Meth Engineering 2021;122:2239–53. https://doi.org/10.1002/nme.6620.

[54] Du H, He Q. JAX-MPM: A Learning-Augmented Differentiable Meshfree Framework for GPU-Accelerated Lagrangian Simulation and Geophysical Inverse Modeling 2025. https://doi.org/10.48550/ARXIV.2507.04192.

[55] Yin Z, Jin Y, Zhang X. Large deformation analysis in geohazards and geotechnics. J Zhejiang Univ Sci A 2021;22:851–5. https://doi.org/10.1631/jzus.A21LDGG1.

[56] Yang CB, Gu L, Li Q. Finite Element Simulation of Track Shoe and Ground Adhesion. AMM 2014;644–650:402–5. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.644-650.402.

[57] Aoshima K, Servin M. Examining the simulation-to-reality gap of a wheel loader digging in deformable terrain. Multibody Syst Dyn 2025;64:121–48. https://doi.org/10.1007/s11044-024-10005-5.

[58] Pogulis M, Servin M. Local particle refinement in terramechanical simulations 2025. https://doi.org/10.48550/ARXIV.2501.05300.

[59] Zhou L, Gao J, Cheng P, Hu C. Study on track–soil traction using discrete element method simulation and soil bin test. AIP Advances 2020;10:075307. https://doi.org/10.1063/5.0016448.

[60] Kwon Y, Song J, Lim N-H, Kim S. Simplified DEM-Based Modelling and Simulation of the Track Ballast. Buildings 2023;14:77. https://doi.org/10.3390/buildings14010077.

[61] Malone KF, Xu BH. Determination of contact parameters for discrete element method simulations of granular systems. Particuology 2008;6:521–8. https://doi.org/10.1016/j.partic.2008.07.012.

[62] Qi B, Guo S, Gao Y, Ye M, Xie C, Zhang A, et al. Segmental Calibration of Soil–Tool Contact Models for Sustainable Tillage Using Discrete Element Method. Sustainability 2025;17:8126. https://doi.org/10.3390/su17188126.

[63] Xiong H, Yin Z-Y, Nicot F. Programming a micro-mechanical model of granular materials in Julia. Advances in Engineering Software 2020;145:102816. https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2020.102816.

[64] Zhou L, Gao J, Hu C, Li Q. Numerical simulation and testing verification of the interaction between track and sandy ground based on discrete element method. Journal of Terramechanics 2021;95:73–88. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2021.03.002.

[65] Tao J, Deng Z, Cao X, Hu G, Wang P. Modeling and Dynamic Characteristics of Tracked Vehicle Equipped with Symmetrical Suspensions Based on Multi-Body Dynamics and Discrete Element Coupling Method. Applied Sciences 2024;14:10618. https://doi.org/10.3390/app142210618.

[66] Liu X, Wang Q, Wang Y, Dong Q. Review of calibration strategies for discrete element model in quasi-static elastic deformation. Sci Rep 2023;13:13264. https://doi.org/10.1038/s41598-023-39446-2.

[67] Nakashima H, Yoshida T, Wang XL, Shimizu H, Miyasaka J, Ohdoi K. Comparison of gross tractive effort of a single grouser in two-dimensional DEM and experiment. Journal of Terramechanics 2015;62:41–50. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2015.03.004.

[68] Wu J, Shen Y, Yang S, Feng Z. Simulation of Track-Soft Soil Interactions Using a Discrete Element Method. Applied Sciences 2022;12:2524. https://doi.org/10.3390/app12052524.

[69] Nicolini A, Mocera F, Somà A. Multibody simulation of a tracked vehicle with deformable ground contact model. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics 2019;233:152–62. https://doi.org/10.1177/1464419318784293.

[70] Gorsich D, Vantsevich V, Paldan J, Moradi L. Modelling and simulation fundamentals in design for ground vehicle mobility Part II: Western approach. Journal of Terramechanics 2024;117:101023. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2024.101023.

[71] Garber M, Wong JY. Prediction of ground pressure distribution under tracked vehicles—I. An analytical method for predicting ground pressure distribution. Journal of Terramechanics 1981;18:1–23. https://doi.org/10.1016/0022-4898(81)90015-x.

[72] Garber M, Wong JY. Prediction of ground pressure distribution under tracked vehicles—II. Effects of design parameters of the track-suspension system on ground pressure distribution. Journal of Terramechanics 1981;18:71–9. https://doi.org/10.1016/0022-4898(81)90001-X.

[73] Meywerk M, Fortmüller T, Fuhr B, Baß S. Real-time model for simulating a tracked vehicle on deformable soils. Advances in Mechanical Engineering 2016;8:168781401664788. https://doi.org/10.1177/1687814016647889.

[74] Jia W, Liu X, Zhang C, Qiu M, Zhang Y, Quan Q, et al. Research on Steering Stability of High-Speed Tracked Vehicles. Mathematical Problems in Engineering 2022;2022:1–12. https://doi.org/10.1155/2022/4850104.

[75] Jia W, Liu X, Zhang C, Qiu M, Tan Y, Yu Z. Design of Zero-Differential steering Controller for tracked vehicles with Hydraulic-Mechanical transmission based on particle swarm optimization Algorithm. IEEE Access 2023;11:32187–200. https://doi.org/10.1109/access.2023.3262515.

[76] Tang S, Yuan S, Hu J, Li X, Zhou J, Guo J. Modeling of steady-state performance of skid-steering for high-speed tracked vehicles. Journal of Terramechanics 2017;73:25–35. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2017.06.003.

[77] Ruslan NAI, Amer NH, Hudha K, Kadir ZA, Ishak SAFM, Dardin SMFS. Modelling and control strategies in path tracking control for autonomous tracked vehicles: A review of state of the art and challenges. Journal of Terramechanics 2023;105:67–79. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2022.10.003.

[78] Zhu L, Liao Q, Wang Z, Chen J, Chen Z, Bian Q, et al. Prediction of soil shear strength parameters using combined data and different machine learning models. Applied Sciences 2022;12:5100. https://doi.org/10.3390/app12105100.

[79] Volosnikov S. Solution of Mathematical Model for Tracked Vehicle Movement Under Different Control Actions. AT 2017:94. https://doi.org/10.30977/AT.2219-8342.2017.40.0.94.

[80] Strawa N, Ignatyev DI, Zolotas AC, Tsourdos A. On-Line learning and updating unmanned tracked vehicle dynamics. Electronics 2021;10:187. https://doi.org/10.3390/electronics10020187.

[81] Huang H, Zhai L, Wang Z. A Power Coupling System for Electric Tracked Vehicles during High-Speed Steering with Optimization-Based Torque Distribution Control. Energies 2018;11:1538. https://doi.org/10.3390/en11061538.

[82] Lv G, Lv H, Chen Z, Chu W, Mao J. Research on inertia transfer in load simulation of tracked vehicle under complex working conditions. Front Mater 2023;10:1188411. https://doi.org/10.3389/fmats.2023.1188411.

[83] Chołodowski J, Dudziński PA, Ketting M. On the energy losses due to tracks vibrations in rubber track crawler vehicles. ArchivCivMechEng 2021;21:59. https://doi.org/10.1007/s43452-021-00212-8.

[84] Wong JY. An introduction to terramechanics. Journal of Terramechanics 1984;21:5–17. https://doi.org/10.1016/0022-4898(84)90004-1.

[85] Liu W, Cheng K. An Analytical Model for Predicting Ground Pressure under a Rigid-Flexible Tracked Vehicle on Soft Ground. Mathematical Problems in Engineering 2020;2020:1–7. https://doi.org/10.1155/2020/6734121.

[86] Wong JY. Terramechanics and off-road vehicle engineering: Terrain behaviour, off-road vehicle performance and Design. Elsevier; 2010.

[87] Galvagno E, Rondinelli E, Velardocchia M. Electro-mechanical transmission modelling for series-hybrid tracked tanks. International Journal of Heavy Vehicle Systems 2012;19:256. https://doi.org/10.1504/ijhvs.2012.047916.

[88] Tota A, Galvagno E, Velardocchia M, Rota E, Novara A. Articulated steering control for an All-Terrain tracked vehicle. 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-55807-9_91.

[89] Tota A, Velardocchia M, Rota E, Novara A. Steering behavior of an articulated amphibious All-Terrain tracked vehicle. SAE Technical Papers on CD-ROM/SAE Technical Paper Series 2020. https://doi.org/10.4271/2020-01-0996.

[90] Tota A, Galvagno E, Velardocchia M. Analytical study on the cornering behavior of an articulated tracked vehicle. Machines 2021;9:38. https://doi.org/10.3390/machines9020038.

[91] Li J, Sun S, Sun C, Liu C, Tang W, Wang H. Analysis of Effect of Grouser Height on Tractive Performance of Tracked Vehicle under Different Moisture Contents in Paddy Soil. Agriculture 2022;12:1581. https://doi.org/10.3390/agriculture12101581.

[92] Duan L, Kang K, Chen S, Du Z, Zhang L, Liu Z, et al. Analysis and Verification of a Slope Steering Model of TRVs in Hilly and Mountainous Environments. Agronomy 2025;15:147. https://doi.org/10.3390/agronomy15010147.

[93] Edwards B. Co-Simulation of MBD Models with DEM Code to Predict Mobility on Soft Soil, Novi, Michigan, United States: 2018, p. 2024-01–3731. https://doi.org/10.4271/2024-01-3731.

[94] Melanz D, Jayakumar P, Negrut D. Experimental validation of a differential variational inequality-based approach for handling friction and contact in vehicle/granular-terrain interaction. Journal of Terramechanics 2016;65:1–13. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2016.01.004.

[95] Lv W, Xu J, Gao C. A rollover safety margin-based approach for quantifying the tractor-semitrailers' emergency lane-changing response on expressway curves. PLoS ONE 2023;18:e0291783. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0291783.

[96] Sierzputowski G, Dudziński P. A mathematical model for determining and improving rollover stability of four-wheel earthmoving vehicles with arbitrary undercarriage system design. Arch Civ Mech Eng 2020;20:52. https://doi.org/10.1007/s43452-020-00054-w.

[97] Ottensmeier M, Prokop G. Development of a Motion Control for a highly dynamic, self-propelled driving simulator. Automot Engine Technol 2023;8:17–42. https://doi.org/10.1007/s41104-022-00124-6.

[98] Asadi F. Engineering mathematics with MATLAB® and Simulink®. Cham: Springer; 2025. https://doi.org/10.1007/978-3-031-85244-2.

[99] Дракулић М. Управљање променом степена преноса код планетарних мењачких преносника. Дипломски рад. Универзитет одбране у Београду, 2017.

[100] Eshkabilov SL. Beginning MATLAB and Simulink: from beginner to pro. Second edition. New York: Apress; 2022.

[101] Gilat A. MATLAB®: An Introduction with Applications. Fourth Edition. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2010.

[102] Wang L. PID control system design and automatic tuning using MATLAB/Simulink. Hoboken, NJ: Wiley, IEEE Press; 2020.

[103] Stankovic M, Ting H, Madonski R. From PID to ADRC and back: Expressing error-based active disturbance rejection control schemes as standard industrial 1DOF and 2DOF controllers. Asian Journal of Control 2024;26:2796–806. https://doi.org/10.1002/asjc.3373.

[104] Stanković M, Madonski R, Manojlović S. Systematic design of ADRC-based unmanned tracked vehicle trajectory tracking with FPGA-in-the-loop validation. Vojnotehnički Glasnik 2024;72:1700–25. https://doi.org/10.5937/vojtehg72-49983.

[105] Amokrane S-B, Laidouni MZ, Adli T, Madonski R, Stanković M. Active disturbance rejection control for unmanned tracked vehicles in leader–follower scenarios: Discrete-time implementation and field test validation. Mechatronics 2023;97:103114. https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2023.103114.

[106] Rauf O, Ning Y, Ming C, Haoxiang M. Evaluation of Ground Pressure, Bearing Capacity, and Sinkage in Rigid-Flexible Tracked Vehicles on Characterized Terrain in Laboratory Conditions. Sensors 2024;24:1779. https://doi.org/10.3390/s24061779.

[107] Hua C, Zhang W, Fu H, Zhang Y, Yu B, Jiang C, et al. The Prediction Method and Application of Off-Road Mobility for Ground Vehicles: A Review. WEVJ 2025;16:47. https://doi.org/10.3390/wevj16010047.

[108] Muzdeka S. Osnovi borbenih vozila. Medija Centar Odbrana, Beograd; 2012.

[109] Wong JY. Theory of ground vehicles. John Wiley & Sons; 2008.

[110] Hariri AE, Ahmed AEE, Kiss P. Sandy Loam soil shear strength parameters and its colour. Applied Sciences 2023;13:3847. https://doi.org/10.3390/app13063847.

[111] Muzdeka S, Peric S. Osnovi borbenih vozila: praktikum za vežbe. Medija Centar Odbrana, Beograd, ISBN: 9788633503761; 2012.

[112] Техничко упутство за БВП М80 и М80А: опис, руковање, основно и техничко одржавање. Београд: Савезни секретаријат за народну одбрану (ССНО); 1988.

[113] Benmeddah A, Jovanović V, Perić S, Drakulić M, Đurić A, Marinković D. Modeling and experimental validation of an Off-Road truck's (4 × 4) lateral dynamics using a Multi-Body simulation. Applied Sciences 2024;14:6479. https://doi.org/10.3390/app14156479.

[114] Szpaczyńska D, Przybysz M, Muszyński T. Comparison of Multi-Tracked Running Gears in Terms of Obstacle Negotiation Capabilities. Applied Sciences 2025;15:1696. https://doi.org/10.3390/app15041696.

[115] Муждека С. Мерење неелектричних величина електричним путем. Војна академија Београд; 2005.

[116] Vesić M, Muzdeka S. Analysis of influence of turning system kinematic scheme on turning power balance for high speed tracked vehicles. Vojnotehnički Glasnik 2007;55:149–68. https://doi.org/10.5937/vojtehg0702149v.

[117] Ponorac L, Blagojević I. Experimental validation of a High-Speed Tracked Vehicle Powertrain simulation model. Measurement Science Review 2023;23:192–201. https://doi.org/10.2478/msr-2023-0025.

[118] Jia W, Liu X, Zhang C, Xue D, Zhang S. Position Estimation Method for Unmanned Tracked Vehicles Based on a Steering Dynamics Model. World Electric Vehicle Journal 2024;15:120. https://doi.org/10.3390/wevj15030120.

[119] Janarthanan B, Padmanabhan C, Sujatha C. Lateral dynamics of single unit skid-steered tracked vehicle. International Journal of Automotive Technology 2011;12:865–75. https://doi.org/10.1007/s12239-011-0099-4.

[120] Aviles M, Aceves-Fernández MA, Odry A, Álvarez-Alvarado JM, Rodriguez-Resendiz J. Artificial Intelligence for Engineering Solutions: Trends, Challenges, and Future Directions. Eng 2026;7:317. https://doi.org/10.3390/eng7070317.

[121] Kowshik SA, Fisseler A, Srinivasa AR, Reddy JN. Physics informed Gaussian process models for real-time simulation of tire terrain interactions for off- road conditions. Journal of Terramechanics 2025;120:101077. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2025.101077.

[122] Golanbari B, Mardani A, Farhadi N, Reina G. Machine learning applications in off-road vehicles interaction with terrain: An overview. Journal of Terramechanics 2024;116:101003. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2024.101003.

[123] Mahakur S, Raheman H, Rasool S. Tractive performance prediction of a track-type walking tractor using machine learning. Journal of Terramechanics 2026;124:101146. https://doi.org/10.1016/j.jterra.2026.101146.

[124] Raschka S, Mirjalili V. Python mašinsko učenje. Beograd: Kompjuter biblioteka; 2020.